Problemas 1.

1.1. Integrar las ecuaciones siguientes:

a) $y' = y-(2+2\cos t)y^2$; b) $y' = \frac{2ty-y^2}{t^2}$; c) $y' = 1-\frac{2}{t+y}$; d) $y' = \frac{t+2y}{t}$;

e) $(5x+2y-3)y' = 9-12x-5y$; f) $y' = x+\frac{x}{y}$; g) $y' = y+\operatorname{sen} x$; h) $y' = \frac{y}{x+y^3}$;

i) $y' = y^2-t(t-2)$; j) $y' = y\frac{y+2t-1}{t+y}$; k) $y' = \frac{1-2ty^3}{3t^2y^2}$; l) $(y')^2 = 9y^4$.

1.2. Integrar mediante cambios de variables: $\frac{dy}{dx}=f\big(\frac{ax+by+m}{cx+dy+n}\big)$. Resolver en particular $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+2}{y-2x+6}$.

1.3. Sea $y'=-3y+3ty^{2/3}$. Hallar su solución general y una o dos soluciones (si hay) con: i) $y(1)=0$ ii) $y(0)=1$.

1.4. Imponer un dato inicial para el que $y'=\frac{y}{t}+\operatorname{sen} t$ tenga: i) solución única, ii) infinitas soluciones.

1.5. Sea $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2+2y^2}$. Probar que tiene un factor integrante que sólo depende de y. Hallar todas las soluciones que sean rectas. Hallar la o las soluciones (si hay) que satisfacen i) $y(1)=0$, ii) $y(1)=1$.

1.6. Dibujar aproximadamente las soluciones de $y' = \sqrt{y/x}$ y determinar cuántas de ellas satisfacen cada uno de los siguientes datos iniciales: i) $y(-1)=-1$, ii) $y(1)=0$, iii) $y(1)=1$.

1.7. Sea $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2}{2xy}$. Resolverla como homogénea, como exacta y como Bernouilli. Precisar dónde crecen y decrecen sus soluciones y si alguna recta es solución. Hallar la expresión explícita de la o las soluciones (si es que existen) que satisfacen: i) $y(1)=-3$, ii) $y(1)=0$.

1.8. Sea $y' = 1+\frac{2}{y-x}$. Hallar su solución general y la o las soluciones (si existen) que satisfagan $y(1)=-1$. Dibujar aproximadamente sus curvas integrales.

1.9. Resolver $y'=\frac{3(y-y^{2/3})}{x}$. Precisar cuántas soluciones cumplen: i) $y(-1)=1$, ii) $y(0)=1$, iii) $y(1)=0$.

1.10. Sea $y'=-[y+t]^2$. Dibujar aproximadamente sus soluciones. Resolverla como Riccati y por otro camino diferente. Hallar la solución (si existe) con i) $y(0)=1$, ii) $y(0)=-1$.

1.11. Sea $y' = |t|-y$. Precisar cuántas soluciones cumplen $y(0)=0$. Dibujar aproximadamente sus soluciones. Escribir la solución con $y(0)=1$ para todos los valores de t para los que esté definida.

1.12. Sea $y' = \frac{y^2}{t}$. Dibujar aproximadamente sus curvas integrales. Hallar (si existen) todas las soluciones que cumplen: i) $y(-1)=1$, ii) $y(1)=0$, iii) $y(0)=1$.

1.13. Estudiar existencia y unicidad, resolver si se puede y dibujar isoclinas y curvas integrales:

a) $y' = \cos(x-y)$ b) $y' = x^2+y^2$ c) $y' = x^2-y^2$ d) $y' = y^{2/3}-y$ e) $y' = x-\frac{1}{y}$

f) $y'=1+\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}$ g) $y' = \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$ h) $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$ i) $y' = 1+y^{2/3}$ j) $y' = x-|y|$

1.14. Sea $y'=e^t-y$. Hallar la solución con $y(0)=0$ y precisar su estabilidad. Dibujar isoclinas, puntos de inflexión y aproximadamente las soluciones.

1.15. Sea $y' = y-y^3$. Hallar su solución general. Precisar cuántas soluciones cumplen: i) $y(0)=0$, ii) $y(0)=-1$. Dibujar aproximadamente sus soluciones. Ver si es estable la que cumple $y(0)=1$.

1.16. Sea $y' = y^2-2t^{-2}$. Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales y hallar las que pasen por el origen. Probar que hay soluciones de la forma $y = \frac{A}{t}$. Determinar en qué intervalo está definida la solución con $y(1)=0$ y estudiar su estabilidad.

1.17. Dibujar aproximadamente las soluciones y precisar la estabilidad de la que cumple $y(1)=1$:

a) $y' = 1-ty$; b) $y' = \frac{y}{t^2}$; c) $y' = y^2-2y^3$; d) $y' = \frac{y^2-y}{t}$; e) $y' = e^{t-y}$

1.18. Sea la familia de circunferencias $x^2+y^2=2Cx$. Escribir la ecuación diferencial de la que son curvas integrales. Hallar las trayectorias ortogonales a ellas (las curvas que las cortan perpendicularmente). Resolver el mismo problema para las parábolas $y^2+2Cx=C^2$.

1.19. Sea $y' = \frac{t-2y}{t}$. Resolverla, estudiar existencia y unicidad y dibujar sus curvas integrales. Precisar la estabilidad de la solución con i) $y(1)=0$, ii) $y(-3)=-1$. Hallar una recta que corte perpendicularmente a las soluciones de la ecuación.

Problemas 2.

2.1. Resolver los problemas de valores iniciales:

a) $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; b) $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; c) $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

2.2. Hallar la solución de:

a) $\begin{cases} x'=x-2y-t\\ y'=2x-3y-t\\ x(0)=y(0)=1\end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=y-2\\ y'=2x-y\\ x(0)=0,\, y(0)=4\end{cases}$ c) $\begin{cases} x'=3x+2y\\ y'=-6x-4y+t\cos t\\ x(0)=y(0)=0\end{cases}$ d) $\begin{cases} x'=2x-y\\ y'=x+|2-t|\\ x(0)=0,\, y(0)=-1\end{cases}$

2.3. Hallar la solución general de las ecuaciones:

a) $x''-x=e^{2t}$, b) $x''+x=t\,e^{t}\cos t$, c) $x'''+2x''+5x'=5t$, d) $x^{IV}+4x=t\,e^{t}\cos t$,
e) $x''+x=\cos^3 t$, f) $t^2x''-3tx'+3x=9\log t$, g) $(t+1)x''-x'=(t+1)^2$, h) $t^2x''-t(t+2)x'+(t+2)x=t^3$.

2.4. Resolver $tx''+2x'=t$: i) como ecuación de Euler, ii) haciendo $x'=y$, iii) haciendo $x=\frac{y}{t}$. Discutir cuántas soluciones de la ecuación satisfacen $x(t_o)=a$, $x'(t_o)=b$.

2.5. Resolver:

a) $\begin{cases} x''+x=2\cos^{-3}t\\ x(0)=x'(0)=0\end{cases}$; b) $\begin{cases} x''+x'=\begin{cases} t+1,\ t\le 1\\ 3-t,\ t\ge 1\end{cases}\\ x(0)=-1,\, x'(0)=0\end{cases}$; c) $\begin{cases} x'''+5x''+8x'+4x=-8e^{-2t}\\ x(0)=1,\, x'(0)=-1,\, x''(0)=9\end{cases}$;

d) $\begin{cases} x''+2tx'=2t\\ x(1)=x'(1)=1\end{cases}$; e) $\begin{cases} t^2x''+4tx'+2x=e^{t}\\ x(1)=x'(1)=0\end{cases}$; f) $\begin{cases} t^3x'''+t^2x''-2tx'+2x=t^3\\ x(1)=x'(1)=x''(1)=1\end{cases}$.

2.6. Hallar la solución general de $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$, si $\mathbf{A}$ es: a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

2.7. Hallar la solución que se indica de los siguientes sistemas y precisar su estabilidad:

a) $\begin{cases} x'=-2z\\ y'=x\\ z'=x-2z\\ x(0)=z(0)=1,\, y(0)=0\end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=x-4y+2z\\ y'=x-3y+z\\ z'=x-2y+1\\ x(0)=2,\, y(0)=z(0)=1\end{cases}$ c) $\begin{cases} x'=y\\ y'=4x+z\\ z'=-z+4e^{-2t}\\ x(0)=1,\, y(0)=-1,\, z(0)=-4\end{cases}$ d) $\begin{cases} x'=y-2z\\ y'=-z\\ z'=4x-5z\\ x(0)=y(0)=0,\, z(0)=1\end{cases}$

2.8. Hallar **una** solución de $x'''+x''+2x'+8x=e^{at}$ para i) $a=1$, ii) $a=-2$, y precisar la estabilidad de la solución hallada en cada caso.

2.9. Sea $x'''+5x''+4x'+cx=t$. i) Hallar una solución particular para todo valor de c . ii) Hallar la solución general para $c=-10$. iii) Discutir la estabilidad de la ecuación según los valores de c .

2.10. Sea $x^{IV}+ax''+4x=e^{t}$. i) Hallar una solución particular para todo a y la solución general si $a=-5$. ii) Dar un valor de a , si existe, para el que sea: a) inestable, b) asintóticamente estable.

2.11. Sea $x^{IV}+2x'''+6x''+ax'+5x=4\cos t$, $a\in\mathbf{R}$. Discutir la estabilidad. Hallar una solución para cada $a\neq 2$. Si $a=10$, hallar la solución general. Si $a=-14$, escribir dos soluciones distintas. Si $a=6$, describir las soluciones para t grande. Si $a=2$, precisar el número de soluciones periódicas.

2.12. Sea $x^{(n)}+6x'+20x=\mathrm{e}^{t}$. i) Resolverla si $n=3$. ii) Estudiar su estabilidad para $n=2,3,4$.

2.13. Estudiar la estabilidad de $x^{(n)}+x=\cos t$ según los valores de $n\in\mathbf{N}$. Para $n=2006$, precisar si la homogénea y la no homogénea poseen alguna solución periódica.

2.14. Sea $\begin{cases} x'=2-y\\ y'=-2y+cz\\ z'=2x-y\end{cases}$ a) Discutir la estabilidad del sistema según los valores de la constante c .
b) Para $c=-1$ hallar la solución con $x(0)=y(0)=0,\, z(0)=-4$.

2.15. Sea $\begin{cases} x'=z-t^2\\ y'=-2ay-w\\ z'=-x+ay\\ w'=y+az\end{cases}$ i) Si $a=0$, hallar la matriz fundamental $\mathbf{W_c}(t)$ con $\mathbf{W_c}(0)=\mathbf{I}$ y la solución del sistema con $x(0)=1$, $z(0)=-2$, $y(0)=w(0)=0$.
ii) Hallar **una** solución del sistema homogéneo para $a=-2$.
ii) Estudiar para qué a el sistema es AE. ¿Es estable si $a=0$?

2.16. Hallar $K(t)$ de forma que la solución de $\begin{cases} \ddot{x}+2\dot{x}+2x=f(t)\\ x(0)=\dot{x}(0)=0\end{cases}$ se escriba $x(t)=\int_0^t K(t-s)f(s)ds$.

2.17. Hallar y dibujar las soluciones con $x(0)=\dot{x}(0)=0$ de: i) $\ddot{x}+x=|\operatorname{sen} t|$, ii) $\ddot{x}+4x=|\operatorname{sen} t|$. Estudiar si tienen o no soluciones periódicas.

Problemas 3.

3.1. Hallar la solución en forma de serie en torno a $t=0$:

a) $x''+tx=0$, b) $(1+t^2)x''-2x=0$, c) $\cos t\, x''+(2-\operatorname{sen} t)x'=0$.

3.2. Sea $x''+[2-2t]x'+[1-2t]x=0$. Hallar el desarrollo hasta t^4 de la solución con $x(0)=0$, $x'(0)=1$. Sabiendo que $x=e^{-t}$ es otra solución, hallar esta solución en términos de una integral y comparar.

3.3. Hallar el desarrollo en torno a $t=0$ de la solucion de $(1-t)(1-2t)x''+2tx'-2x=0$ con $x(0)=x'(0)=1$. ¿Dónde converge la serie solución? Hallar las raíces del polinomio indicial para cada punto singular regular. Estudiar cuántas soluciones satisfacen $x(1)=0, x'(1)=1$.

3.4. Sea $2\sqrt{t}\,y''-y'=0$. Precisar si $t=0$ es punto singular regular de la ecuación. Calcular, hasta tercer orden, el desarrollo en serie en torno a $t=1$ de la solución que cumple $x(1)=x'(1)=1$.

3.5. Sea $4t^2x''-3x=t^2$. a) Calcular el desarrollo hasta orden 4 en torno a $t=1$ de la solución de la homogénea que cumple $x(1)=0, x'(1)=1$. b) Hallar la solución general de la no homogénea.

3.6. Sea $3(1+t^2)x''+2tx'=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrorro de una solución que se anule en $t=0$. Estudiar si todas las soluciones están acotadas cuando $t\to\infty$.

3.7. Sea $2t^2x''+t(t+1)x'-(2t+1)x=0$. Hallar una solución no nula de la ecuación que sea analítica en $t=0$. ¿Están acotadas todas las soluciones de dicha ecuación en un entorno del origen?

3.8. Sea $3tx''+(2-6t)x'+2x=0$. Hallar una solución que no sea analítica en $t=0$. Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial que sea analítica en $t=0$.

3.9. Hallar, para $t>0$, el desarrollo de una solución de $4tx''+2x'+x=0$ que no se anule en $t=0$ y la solución general de la ecuación en términos de funciones elementales. Hacer un cambio de variable independiente de la forma $s=t^r$ y comprobar el resultado.

3.10. Sea $ty''+y=0$. Hallar el término general del desarrollo de una solución no trivial que se anule en $t=0$. Calcular el valor de la constante del término que contiene el $\ln t$ en la segunda solución.

3.11. Hallar la solución general de $t^2x''+t(4-t)x'+2(1-t)x=0$, desarrollando en torno a $t=0$ e identificar las series solución con funciones elementales.

3.12. Sea $t(1+t)x''+(2+3t)x'+x=0$. Hallar el desarrollo de una solución no nula acotada en $t=0$ y probar que hay soluciones no analíticas en $t=-1$. Comprobarlo utilizando que $x=\frac{1}{t}$ es solución.

3.13. Calcular las soluciones en el punto $t=0$ de la ecuación $(1-t^2)x''-tx'+p^2x=0$ (Chebyshev), y determinar para qué valores de p las soluciones son polinomios.

3.14. Sea $tx''+(1-t^2)x'+ptx=0$. Precisar, resolviendo por series en torno a $t=0$, todos los valores de p para los que hay soluciones polinómicas y escribir uno de estos polinomios para $p=4$.

3.15. Resolver $t^2y''+ty'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ i) mediante un cambio de la forma $y=t^r u$, ii) por series.

3.16. Sea $t^2(1+t)x''+t(3+2t)x'+x=0$. Hallar, trabajando por series en $t=0$, una solución no trivial que no contenga el $\ln t$. Probar que todas sus soluciones están acotadas cuando $t\to\infty$.

3.17. Sea $[t^4+t^2]x''+[5t^3+t]x'+[3t^2-1]x=0$. Escribir la ecuación para su punto del infinito. Probar que posee soluciones no triviales que tienden a 0 cuando i) $t\to 0$, ii) $t\to\infty$. ¿Existen soluciones que tiendan a 0 tanto cuando $t\to 0$ como cuando $t\to\infty$?

3.18. Sea $t^4x''+2t^3x'-x=1$. Determinar si $t=0$ y $t=\infty$ son puntos regulares o singulares regulares de la homogénea. Hallar la solución que satisface $x(1)=0, x'(1)=1$.

3.19. Hallar una solución linealmente independiente de P_1 para la ecuación de Legendre con $p=1$, sin recurrir a series. Comparar su desarrollo con el de la teoría. Hacer $t=\frac{1}{s}$, resolver y comparar.

3.20. Sea $(1-t^2)x''-2tx'+x=0$ (Legendre con $p=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$). Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de la solución que cumple $x(0)=0$, $x'(0)=1$. Ver si hay soluciones no triviales que tiendan a 0 cuando i) $t\to -1$, ii) $t\to\infty$.

3.21. Sea $t(t-1)x''+x'-px=0$. Deteminar para qué valores de p posee solución polinómica. Porbar que si $p=2$ existen soluciones que tienden a 0 cuando $t\to\infty$.

Problemas 4.

4.1. Dibujar el mapa de fases de los sistemas lineales: a) $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=x-y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=y-x \end{cases}$; c) $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x+1 \end{cases}$.

4.2. Sea (S) $\begin{cases} x'=4x+2y \\ y'=x+5y \end{cases}$. Dibujar el mapa de fases de (S). Hallar la solución de (S) que satisface $x(0)=2,\ y(0)=-1$. Hallar la expresión de las órbitas de (S).

4.3. Sea [S] $\begin{cases} x'=x+2y-3 \\ y'=4x-y-3 \end{cases}$. Hallar sus órbitas y dibujar su mapa de fases. ¿Para qué valores de a la $y(t)$ de la solución de [S] con $x(7)=0$, $y(7)=a$ tiende a $-\infty$ si $t\to\infty$?

4.4. Resolver [e] $(1+x^3y)+(x^4+x^3y)\frac{dy}{dx}=0$. Precisar cuántas soluciones de [e] cumplen $y(1)=1$ y dar su expresión explícita. Dibujar el mapa de fases de $x'=x^4+x^3y$, $y'=-1-x^3y$.

4.5. Sea $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y-y^2+x^4 \end{cases}$. Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. [Ayuda: $y=\pm x^2$ son soluciones de la ecuación de las órbitas].

4.6. Dibujar el mapa de fases de los sistemas:

a) $\begin{cases} x'=y(x+1) \\ y'=x(y^3+1) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=4x-2y \\ y'=2x-xy \end{cases}$ c) $\begin{cases} x'=x-x^2y \\ y'=y-x^3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x'=y\,e^x \\ y'=e^x-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'=x^2y \\ y'=x^4-1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=4x-y-3x^2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x'=x^2-2xy \\ y'=y^2-2xy \end{cases}$ h) $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=y-x \end{cases}$

4.7. Dibujar el mapa de fases de las ecuaciones:

a) $x''=-4x'-4x$; b) $x''=x(1-x-x')$; c) $x''=x-x^3$; d) $x''=(1-x^2)x'-x$.

4.8. Dibujar el mapa de fases y estudiar qué soluciones están definidas para todo $t\in\mathbf{R}$:

a) $\begin{cases} x'=1-x+3y \\ y'=x+y-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x'=\operatorname{sen} y \\ y'=\operatorname{sen} x \end{cases}$; c) $\begin{cases} x'=2xy \\ y'=1-x^2+y^2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x'=x+2xy \\ y'=y^2-1 \end{cases}$.

4.9. Clasificar los puntos críticos de $x''=\operatorname{sen}(ax+x')$, $a>0$, y dibujar el mapa de fases para $a=2$.

4.10. a) Sea $x''=ax-(x')^2$. Discutir la estabilidad de su solución $x\equiv 0$ [para $a=0$ dibujar el mapa de fases]. b) Hallar para $a=0$ la solución de la ecuación que satisface $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

4.11. Clasificar, en función de los valores de $k\geq 0$, los puntos críticos de $\ddot{x}=1-x^2-k\dot{x}$. Dibujar el mapa de fases para $k=0$, $k=1$ y $k=3$ y dar una interpretación física de las órbitas.

4.12. Una partícula se mueve por el eje x según $\ddot{x}=-x(x^2+9)^{-2}$. Dibujar e interpretar el mapa de fases. Si la partícula pasa por el origen con velocidad $v=\frac{1}{3}$, ¿qué velocidad tiene cuando pasa por $x=4$? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a $x=4$?

4.13. Sea [S] $\begin{cases} x'=x+x^2 \\ y'=2x+y \end{cases}$. a) Precisar la estabilidad de la solución de $x'=x+x^2$ con $x(0)=-2$. b) Hallar órbitas y dibujar el mapa de fases de [S]. c) Hallar la solución de [S] con $x(0)=y(0)=-1$. d) Hallar $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$, si $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es la solución de [S] con $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4.14. Dibujar el mapa de fases de $x''=(x')^2-x$ y hallar la solución que cumple $x(2)=\frac{1}{2}$, $x'(2)=1$.

4.15. Dibujar el mapa de fases de (E) $x''=2x^3-2x$. ¿Para qué valores de b es periódica la solución $x(t)$ de (E) que cumple $x(0)=0$, $x'(0)=b$? Hallar la solución $x(t)$ de (E) con $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

4.16. a) ¿Para qué a y b podemos asegurar que $x''+x+ax^2+bxx'=0$ tiene un centro en el origen? b) Si $a=b=-1$, dibujar el mapa de fases. ¿Qué sugiere el dibujo sobre la estabilidad de $x=0$?

4.17. Dibujar el mapa de fases tras escribir el sistema en coordenadas polares:

a) $\begin{cases} x'=y+x(1-x^2-y^2) \\ y'=-x+y(1-x^2-y^2) \end{cases}$; b) $\begin{cases} x'=-2x \\ y'=x^2+y^2-2y \end{cases}$; c) $\begin{cases} x'=x^2-xy-2y \\ y'=xy-y^2+2x \end{cases}$.

4.18. Precisar la estabilidad de las soluciones constantes de:

a) $\begin{cases} x'=x \\ y'=x^2-y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x'=y+x^3+xy^2 \\ y'=-x+x^2y+y^3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x'=x^2-y \\ y'=x\,e^y \end{cases}$.

4.19. Sea $\begin{cases} x'=y-xy \\ y'=x^2-x \end{cases}$. Dibujar su mapa de fases. Estudiar la estabilidad de sus puntos críticos. Precisar las órbitas asociadas a soluciones periódicas y calcular su periodo.