Problemas adicionales 1

1. Hallar las soluciones particulares que satisfacen los siguientes problemas de valores iniciales:

$y'=\frac{3y^2-t^2}{2ty}$, $y(1)=2$ $\quad$ $y'=1+\cos^2(y-t)$, $y(0)=\pi$ $\quad$ $e^y-2t+t\,e^y y'=0$, $y(1)=0$

$y'=\frac{y\,\text{sen}\,t}{\ln y}$, $y(0)=e$ $\quad$ $t^2+y^2+t+tyy'=0$, $y(1)=1$ $\quad$ $y'=\cos t-y-\frac{\text{sen}\,t}{\cos^2 t}\,y^2$, $y(0)=0$

2. Probar que la ecuación lineal admite un factor integrante que sólo depende de t y utilizarlo para deducir la expresión de la solución general de dicha ecuación.

3. Comprobar que $y'=t^{n-1}f(y+at^n)$ se convierte en una ecuación de variables separadas haciendo $z=y+at^n$ y utilizarlo para resolver $y'=2t(y+t^2)^2$. Resolverla después considerándola como una ecuación de Riccati.

4. Dibujar el campo de direcciones y la forma aproximada de las curvas integrales de:

$y'=1-y^2$ $\quad$ $y'=t^2+y$ $\quad$ $y'=1-\frac{t}{4y}$ $\quad$ $y'=\frac{1}{2}[y-t]^3$ $\quad$ $y'=\frac{3ty+2y^2}{t^2+ty}$ $\quad$ $y'=\frac{t^2-y}{t+y^2}$

5. Estudiar existencia y unicidad de soluciones y curvas integrales y dibujar aproximadamente:

$y'=\frac{y-t}{y+t}$ $\quad$ $y'=|y-t|$ $\quad$ $y'=3ty^{1/3}$ $\quad$ $y'=\frac{1}{(t-4y)^2}$ $\quad$ $y'=\frac{2}{t}\sqrt{y}$ $\quad$ $y'=y\ln|t|$

6. Estudiar existencia, unicidad, prolongabilidad y hacer el dibujo aproximado de las soluciones de

$y'=1-\frac{y}{t}$ $\quad$ $y'=\frac{y}{y-t}$ $\quad$ $y'=\frac{1}{t^2+y^2}$ $\quad$ $y'=y^4+y$ $\quad$ $y'=-ye^{-y^2}$ $\quad$ $y'=\frac{y}{\text{sen}\,t}$ $\quad$ $y'=e^{-y/t}$

7. Sean $y'=\sqrt{4-y^2}$ y los datos iniciales: a) $y(0)=-2$, b) $y(\pi)=0$. Hallar la única solución que satisface uno de los datos anteriores y encontrar dos soluciones distintas que satisfagan el otro.

8. Sea $y'=\begin{cases} t & \text{si } y\geq t \\ y & \text{si } y\leq t \end{cases}$. Estudiar existencia y unicidad de soluciones. Dibujar estas soluciones. Hallar para todo t la que satisface $y(-3)=3$.

9. Sea $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{ay^2-x^2}$. Para todo a , resolverla y precisar el número de curvas integrales que pasan por cada punto del plano. Dibujar sus soluciones para $a=3$.

10. Estudiar la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=a$, según los valores de a :

$y'=\text{sen}\,y$ $\quad$ $y'=2t^{-3}y+\cos^3 t$ $\quad$ $y'=1-e^y$ $\quad$ $y'=-\frac{y}{2t}+t^3$ $\quad$ $y'=y^2-y\cos t$

11. Resolver $y'=\frac{t^2+y^2}{2ty}$. Dibujar isoclinas y curvas integrales. Determinar cuántas curvas integrales pasan por cada punto del plano. Estudiar la estabilidad de la solución que cumple $y(1)=1$.

12. Estudiar la estabilidad de solución con $y(0)=0$ de $y'=\text{sen}(\pi y)-ay$, según los valores a . Dibujar las isoclinas, los puntos de inflexión y las soluciones para $a=2$ [$\arccos\frac{2}{\pi}\approx 0.28$].

13. Estudiar la estabilidad de la solución de $y'=1-y-y^3$ con $y(0)=0$.

14. Dibujar aproximadamente las soluciones de las siguientes ecuaciones y estudiar la estabilidad de la solución que satisface la condición inicial que se indica :

$y'=-\frac{2y}{t}+4t$	$y'=y^3+2y^2$	$y'=\frac{2y-t}{t-2}$	$y'=-\frac{t}{y}-ty$	$y'=-\frac{y}{2t}+y^3$
$y(1)=1$	$y(0)=-2$	$y(\pi)=0$	$y(1)=1$	$y(1)=0$

15. Sea la ecuación $y'=\frac{ay}{t}+\frac{y^3}{t^3}$. a) Estudiar existencia y unicidad. b) Resolver por dos métodos diferentes para todo a .
c) Dibujar el campo de direcciones y las soluciones para $a=-1$, $a=0$, $a=\frac{1}{2}$ y $a=1$.
d) Estudiar la estabilidad de todas las rectas solución que tenga para todo a .

16. Comprobar que las soluciones $y(t,a)$ de i) $y'=-y+e^{at}$, ii) $y'=\cos^2 ay$ que satisfacen $y(0)=0$ son funciones continuas del parámetro a .

17. Calcular el valor aproximado en $t=0.2$ de la solución de i) $y'=y^2, y(0)=1$; ii) $y'=t^2+y^2, y(0)=0$ a partir de la segunda aproximación de Picard. Comparar con Euler y Runge-Kutta para $h=0.1$.

18. Integrar numéricamente entre 0 y 1 los problemas $y' = t+y$, $y(0)=2$; $y' = t-y$, $y(0)=2$, mediante los métodos de Euler, Euler modificado y Runge-Kutta, para $h=0.2$, $h=0.1$ y $h=0.05$. Resolver las ecuaciones y comparar con los valores exactos.

19. Sea $y' = y - \frac{1}{t}$. Estudiar existencia y unicidad y dibujar las curvas integrales. Sea y_a la solución con $y(1)=a$. ¿Para algún a está y_a acotada $\forall t \geq 1$? Aproximar este a con métodos numéricos.

20. Sea $y' = 2ty + t^2y^2$. Resolverla y dibujar aproximadamente sus soluciones. Aproximar las que cumplen $y(0)=1$, $y(0)=-1$, $y(10)=-0.2$ con diferentes métodos numéricos y diferentes pasos.

21. Un cuerpo de masa m es lanzado con velocidad inicial v_o a gran altura en la atmósfera terrestre. Suponemos que cae en línea recta y que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad terrestre mg (suponemos g constante) y otra fuerza $-kv$ debida a la resistencia del aire. Hallar la velocidad límite del cuerpo cuando $t\to\infty$. Modificar el ejemplo anterior suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a v^2.

22. Supongamos que tenemos un gramo de un extraño material radiactivo que se desintegra con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad existente. Si al cabo de un año sólo queda 1/4 de gramo, ¿al cabo de cuántos años tendremos 0.1 gramos? Comprobar que este material se desintegra totalmente en un tiempo finito y calcular ese tiempo.

23. Un cuerpo a 80^o de temperatura se coloca en el instante $t=0$ en un medio cuya temperatura se mantiene a 20^o y al cabo de 5 minutos el cuerpo se ha enfriado hasta los 50^o . Suponiendo que su enfriamiento sigue la ley de Newton (su temperatura varía proporcionalmente a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio) determinar: a) la temperatura del cuerpo al cabo de 10 minutos; b) el instante en que dicha temperatura será de 30^o .

24. Un cuerpo se coloca en un medio con temperatura $T(t)=\operatorname{sen} t$ en el instante t . Comprobar que, si sigue la ley de Newton, la temperatura del cuerpo tiende a oscilar periódicamente.

25. Supongamos que la ecuación $y' = y[1-h(t)y]$, $h(t) > 0$, describe la evolución de una población animal con tope logístico variable. Estudiar el comportamiento de las soluciones para grandes valores de t si: i] $h(t)\to\infty$ cuando $t\to\infty$, ii] $h(t)\to \text{cte}$ cuando $t\to\infty$. Interpretar el resultado.

Problemas adicionales 2

1. Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de

$$xx'''-x'x''-2x^2=\tan t \qquad (1-t^2)x''-2tx'+x=0 \qquad \begin{array}{l} x'=tx+\ln t \\ y'=x\sqrt{t}-y \end{array} \qquad \begin{array}{l} x'=x+\operatorname{sen} y \\ y'=tx^{2/3}-y \end{array}$$

2. i) Utilizando matrices y ii) convirtiendo los sistemas en ecuaciones de segundo orden, resolver:

$$\begin{array}{lllll} x'=x+2y & x'=x-2y+2 & x'=3x+y+te^{2t} & x'=x+2y & x'=2x+y \\ y'=-2x+y & y'=5x-y+1 & y'=-x+y & y'=4x-y+9t & y'=3x+4e^{3t} \\ x(0)=y(0)=1 & x(0)=y(0)=0 & x(0)=1, y(0)=-1 & x(0)=3, y(0)=2 & x(0)=y(0)=0 \end{array}$$

3. Estudiar existencia, unicidad y prolongabilidad y hallar la solución general de:

$$\begin{array}{llll} x''+x=t\operatorname{sen}2t-1 & x''+2x'+2x=te^{-t} & x''-x=2(1+e^t)^{-1} & x^V+2x'''+x'=t \\ x^{iv}+x=\operatorname{sen} t & t^2x''+3tx'+x=\ln t & t^2x''+5tx'+4x=t^{-2} & (1+t^2)x''+2tx'=2t^{-3} \end{array}$$

4. Hallar la solución general sabiendo que la x_1 que se indica es solución de la homogénea:

$$\begin{array}{lll} tx''-(t+1)x'+x=t^2e^t & (t^2-1)x''-2x=0 & t^2x''-2tx'+(2-t^2)x=2t^3\operatorname{ch} t \\ x_1=e^t & x_1=t^2-1 & x_1=t\operatorname{sh} t \end{array}$$

5. Calcular para todo a la solución x_a de $tx''+ax'=1$ con $x_a(1)=x_a'(1)=0$.
¿Es x_a función continua de a?

6. Hallar la matriz fundamental canónica en $t=0$ del sistema asociado a las siguientes ecuaciones:

$$x''+2x'+x=0 \qquad x'''+x''+x'+x=0 \qquad 2(t+1)^2x''+3(t+1)x'-x=0 \qquad (1-t)x''+tx'-x=0$$

7. Sean x_1, x_2 soluciones de $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ y llamemos $w(t)$ a su determinante wronskiano $|\mathbf{W}|(t)$. Comprobar que $(x_2/x_1)'=w(t)/x_1^2$. Hallar $w'(t)$ y utilizando la ecuación concluir que

$$w(t)=w(0)\,e^{-\int a(s)ds} \quad \text{(fórmula de Abel).}$$

Deducir la fórmula para x_2 en función de x_1 hallada en teoría mediante reducción de orden.

8. Resolver $t^2(t+3)x'''-3t(t+2)x''+6(t+1)x'-6x=0$ sabiendo que $x_1=t^2$ es solución de la ecuación.

9. Sea $t^3x'''-3t^2x''+6tx'-6x=f(t)$. Hallar una matriz fundamental del sistema equivalente y utilizarla pra encontrar una fórmula para la solución general de la ecuación no homogénea.

10. Calcular la solución particular que se indica y precisar si es estable o no:

$$\begin{array}{lll} x''-2x'+2x=e^t\cos t & x'''+x'-10x=36te^{-t} & x^{iv}-16x=8t^2 \\ x(0)=x'(0)=0 & x(0)=0, x'(0)=-3, x''(0)=2 & x(0)=-1, x'(0)=-2, x''(0)=3, x'''(0)=-8 \end{array}$$

11. Resolver $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=2x-y+t \end{cases}$ con $x(0)=0$, $y(0)=1$. ¿Es estable esta solución?

12. Determinar si son estables las soluciones de la ecuación $x^{iv}+x'''+3x''+2x'+3x=0$.

13. Hallar una solución de $x'''+x'+x=\cos t+te^{-t}$ y determinar si dicha solución es estable.

14. Sea $x'''+ax''+3x'+9x=e^{3t}$. Resolverla si $a=-5$ y si $a=3$. Discutir su estabilidad.

15. Sea $x'''+2x''+(1+a)x'+4a^2x=e^{-t}$. i) Para $a=0$, resolverla con $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=-1$.
ii) Hallar una solución particular para todo a. iii) Precisar para qué a es asintóticamente estable.

16. Sea $x'''+ax''+bx'+abx=1$. Discutir su estabilidad según los valores de las constantes a y b.
Para $a=-1$, $b=1$, hallar la solución con $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=-1$.
Determinar para qué valores de a y b ninguna solución está acotada en todo $(-\infty,\infty)$.

17. Determinar un a para el que el sistema $\begin{cases} x'=-2x+y \\ y'=x-2y+az \\ z'=ay-z \end{cases}$ sea i) asintóticamente estable ii) estable no asintóticamente iii) inestable

18. Sea $\begin{cases} x'' + cx' + a^2x + y = 0 \\ y'' + cy' + a^2y + x = 0 \end{cases}$. Determinar para qué valores de a y c es asintóticamente estable.
Hallar para $a=1$ y $c=0$ la solución con $x(0)=y(0)=1$, $x'(0)=y'(0)=0$. ¿Es estable esta solución?

19. Sea $t^2x'' - 6x = (a-3)t^a$, con $x(1)=0$, $x'(1)=1$.
Hallar su solución para todos los valores de la constante a y determinar su estabilidad.

20. Estudiar existencia y unicidad y resolver las ecuaciones no lineales $2tx'x'' = (x')^2-1$, $x'' = 4t\sqrt{x'}$.
Determinar la estabilidad de la solución con $x(1)=x'(1)=1$.

21. Hallar por Laplace las soluciones pedidas en los problemas 2 , 10 , 11 , 16 y 18 .

22. Resolver:
$\begin{cases} x'' + x = u_\pi(t) \\ x(0)=1, x'(0)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'' - x = 2\delta(t-1) \\ x(0)=1, x'(0)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x''' - 3x'' + 2x' = f(t) \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=2 \end{cases}$, $f(t)=\begin{cases} 0\,,\ 0\le t<1 \\ 2\mathrm{e}[2t-3]\,,\ t\ge 1 \end{cases}$

23. Hallar la 'solución' de $x''' + 6x' + 20x = 18\delta(t-\pi)$ con $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ y escribir su valor para $t=\frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{13\pi}{12}$. ¿Cuántas derivadas posee dicha 'solución' en $t=\pi$?

24. Resolver los sistemas:
$\begin{cases} x'=-x+y \\ y'=x-y+2\delta(t-1) \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'=-y+f(t) \\ y'=x+f(t) \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$, $f(t)=\begin{cases} 1\,,\ 0\le t<\pi \\ 0\,,\ t\ge\pi \end{cases}$ $\begin{cases} x' = x + f(t) \\ y' = x + y \\ x(0)=-2, y(0)=1 \end{cases}$, $f(t)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^t,\ 0\le t<1 \\ 0\,,\ t\ge 1 \end{cases}$

25. Sea $x^{iv} + 4x''' + cx'' + 4x' + x = \operatorname{sen} t$. Discutir cuántas soluciones periódicas posee.

26. Determinar si existen soluciones 2π-periódicas:
$x''+x = \cos^3 t$ $x''-x'+2x = \operatorname{sen} t$ $4x''+x = \cos t$ $x''=\operatorname{sen} t|\cos t|$ $x'' + x = \operatorname{sen}(t+1)$

27. Sea $x'' + x = f_c(t)$ $(c>0)$ donde i) $f_c(t) = \operatorname{sen} ct$, ii) $f_c(t) = \delta(t-\frac{2\pi}{c}) + \delta(t-\frac{4\pi}{c}) + \cdots$
Hallar la solución general para todo c . Si $c=1$ y $c=2$, estudiar si hay soluciones 2π-periódicas y dibujar la solución con $x(0)=x'(0)=0$, comparando con $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Interpretar físicamente.

28. Sea $x'' + x' + x = \operatorname{sen} ct$, $c>0$.
Determinar la solución periódica $y^*(t,c)$ a la que tienden a acercarse todas las soluciones y escribirla para cada c en la forma $y^* = A\operatorname{sen}(ct+B)$. Estudiar como varía A en función de c . ¿Para qué valor de c se obtiene la amplitud máxima? Interpretarlo físicamente.

Problemas adicionales 3

1. Estudiar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no y clasificarlos:
$(2t-t^2)x''+x'-x=0 \quad t^2x''+2x'+4x=0 \quad tx''+e^tx'+3\cos tx=0 \quad t\,\text{sen}\,tx''+3x'+tx=0$

2. Hallar las raíces del polinomio indicial en los puntos singulares regulares de las ecuaciones:
$a)\ (2t^2+t^3)x''-x'+x=0\,,\qquad b)\ t(t-1)^2x''+\ln|t|\,x=0\,,\qquad c)\ \text{sen}\,t\,x''+tx'=0\,.$

3. Escribir una ecuación que: i) tenga un punto singular regular en $t=0$ y en él las raíces de su polinomio indicial sean $\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{3}$, ii) tenga en $t=1$ un punto singular que no sea regular.

4. Resolver por medio de series en torno a $t=0$:

$(1+t^2)x''-2tx'+2x=0$	$x''-e^tx=0$	$t^2x''-5tx'+3(t+3)x=0$	$tx''+(1-t)x'+x=0$
$(t^2-t)x''-tx'+x=0$	$x''+t^2x=0$	$3t^2(1+t)x''+t(5+2t)x'-x=0$	$(t^2-1)x''-2x=0$
$(t^2-1)x''+3tx'+tx=0$	$2tx''+x'-x=0$	$t^2x''-t(t+2)x'+(t+2)x=0$	$(1-\cos 3t)x''-2x=0$

5. Discutir para qué valores de a es $t=0$ punto singular regular de $t^ax''+4tx'+2x=0$. Si $a=2$, hallar el desarrollo en serie de la solución con $x(1)=1$, $x'(1)=-1$ en $t=1$ hasta tercer orden.

6. Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en $t=1$ de la solución de $x''-\ln|t|x'=0$ con $x(1)=0$, $x'(1)=1$. Determinar qué puntos son regulares o singulares regulares.

7. Sean las ecuaciones $t^2x''+x'=0$ y $t^3x''+tx'-x=0$. Hallar la solución general por métodos elementales y estudiar la estabilidad. ¿Se podrían resolver por series en torno a $t=0$? Calcular hasta orden 3 el desarrollo en serie de potencias en torno a $t=1$ de la solución con $x(1)=x'(1)=1$.

8. Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial de $tx''-x'+4t^3x=0$ que se anule en $t=0$ y expresarla en términos de funciones elementales. Hallar la solución general de la ecuación. Hacer un cambio de variable de la forma $s=t^n$ y comprobar el resultado.

9. Hallar una solución no trivial de $tx''-(3t+1)x'+9x=0$.
¿Es cierto que todas las soluciones de la ecuación tienden a 0 cuando t tiende a 0?

10. Sea $tx''-x'-4t^3x=0$. Comprobar que $x=e^{t^2}$ es solución. Hallar el desarrollo en serie de potencias de una solución que se anule en $t=0$.

11. Hallar el desarrollo hasta orden 5 de una solución de $t^2x''-3t^4x'-(3t^3+2)x=0$ que esté acotada en $t=0$ [puede ser útil saber que $x=1/t$ es solución].

12. Sea $(x+1)^2y''+(x^2-1)y'+2y=0$. Calcular una solución analítica en $x=-1$ y estudiar si existe alguna solución linealmente independiente de la anterior que sea analítica en $x=-1$.

13. Estudiando las vibraciones de una molécula diatómica se llega a $u''+u'-(e^{-x}-1)^2u=0$. Hallar hasta x^4 el desarrollo en serie de una solución. ¿Están todas las soluciones acotadas en $x=0$?

14. Probar que $2\ln t\,x''+x'+2x=0$ tiene un punto singular regular en $t=1$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo de una solución. ¿Dónde converge, al menos, la serie obtenida?

15. Dar un valor de b para el que la solución general por series de $tx''+be^{\text{sen}\,t}x'=0$ en torno a $t=0$ no contenga logaritmos y otro valor para el que sí.

16. Determinar si contiene logaritmos la solución general por series en $t=0$ de $tx''+2\cos t\,x'=0$.

17. Sea $t^2x''+tx'+(t-\frac{1}{4})x=0$. Hallar el desarrollo de una solución acotada en $t=0$. Determinar si hay soluciones linealmente independientes de la anterior que no contengan el $\ln t$.

18. Sea $(1-t^2)x''-tx'+x=1-t^2$. Resolver la homogénea por series y hallar la solución de la no homogénea en términos de funciones elementales. Comprobar haciendo el cambio $t=\cos s$.

19. Hallar la solución general de $(t^3+1)x''-3t^2x'+3tx=(t^3+1)^2$.

20. Sea $t^2x'' - 3tx' + 3x = t^3$. Hallar la solución general de la no homogénea. Hallar la solución general de la homogénea utilizando series de potencias centradas en i] $t=0$, ii] $t=1$.

21. Sean $t^2x'' - 2tx' + [2+t^2]x = t^3 \cos t$, $t^2x'' - 4tx' + [t^2+6]x = t^4$
Hallar la solución general de la homogénea en forma de series en tono a $t=0$.
Hallar la solución general en términos de funciones elementales.

22. Hallar la solución general de la ecuación $\operatorname{sen} t\, x'' - 3\cos t\, x' = 2 \operatorname{sen} t \cos t$. Determinar qué puntos t son regulares o singulares regulares, y hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en torno a $t=0$ de una solución de la homogénea que no sea constante.

23. Sea $t(1-t)x'' + (1-2t)x' + \alpha x = 0$. Hallar todos los valores de α para los que su solución analítica en $t=0$ es un polinomio. Calcular para $\alpha=20$ una solución acotada en $t=0$.

24. Estudiar las soluciones en $t=0$ de la ecuación de Laguerre $tx'' + (1-t)x' + px = 0$, y determinar para qué valores de p hay soluciones que son polinomios.

25. Hallar una solución de $tx'' + 2x' + p^2tx = 0$ que esté acotada en $t=0$. Hacer $x = \frac{y}{t}$ y comprobar.

26. Deducir de la fórmula de Rodrigues: $nP_n = tP_n - P'_{n-1}$, $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)tP_n - nP_{n-1}$.

27. Cualquier polinomio $Q_n(t)$ de grado n se puede escribir como combinación lineal de los $n+1$ primeros polinomios de Legendre: $Q_n = c_0P_0 + \cdots + c_nP_n$. Probar que $c_k = \int Q_n(t)P_k(t)dt$. Escribir $Q_4(t)=t^4$ como combinación lineal de $P_0, \ldots, P_4$.

28. Obtener los polinomios H_4 y H_5 de Hermite a partir de: i) la serie general de los apuntes, ii) la función generatriz, iii) la fórmula de Rodrigues.

29. Desarrollar hasta orden 3 en $t=1$ la solución de $t^2x'' + tx' + (t^2-\frac{1}{4})x = 0$ con $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

30. Calcular la solución de $t^2x'' + tx' + (t^2-\frac{1}{4})x = t^{3/2}$ con $x(1)=1$, $x'(1)=-\frac{1}{2}$.

31. Hallar las funciones de Bessel $J_{5/2}$ y $J_{7/2}$.

32. Calcular las siguientes primitivas: $\int uJ_0(u)\,du$, $\int u^3J_0(u)\,du$, $\int u[J_0(u)]^2\,du$.

33. Sea [E] $t^3x'' + [At^2+B]x' + [Ct^2+D]x = 0$. Determinar para qué valores de A, B, C y D son tanto $t=0$ como $t=\infty$ puntos singulares regulares de [E]. Para estos valores, precisar cuándo existen soluciones de [E] que tienden hacia 0 cuando $t \to \infty$.

34. Comprobar que las ecuaciones de Hermite y Bessel tienen un punto singular en el infinito.

35. Hallar una solución de la forma $t^r \Sigma a_n t^n$ de $t^2x'' + (3t-1)x' + x = 0$ y discutir su validez.

36. Adaptar la teoría de este capítulo a la resolución por series de las ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes analíticos (o 'poco' no analíticos). Hallar por este camino la solución de algunas ecuaciones de los problemas del tema 1 resolubles por series y comparar resultados.

Problemas adicionales 4

1. Dibujar el mapa de fases:

$x''+x' = 2x+x^2$ $\quad$ $x''=1$ $\quad$ $x''=x^{-3}-x^{-2}$ $\quad$ $x''=x[(x')^2-1]$ $\quad$ $2x''-(x')^2+x(x-2)=0$

$\begin{array}{l} x' = xy - y \\ y' = x - y \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} x' = xy \\ y' = x+y^2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} x' = y - y^2 \\ y' = x - x^2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} x' = 2y + 2xy \\ y' = 2x-x^2-y^2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} x' = 2x \\ y' = y(1-y)+x^2 \end{array}$

2. Sea [S] $\begin{cases} x' = a(y-x) + 1 \\ y' = a(y-x) + x \end{cases}$. Hallar sus órbitas y estudiar la estabilidad de sus soluciones $\forall a$. Para $a=-1$, $a=0$ y $a=1$ dibujar el mapa de fases de [S]. Para $a=-1$, calcular la solución de [S] que satisface $x(0)=y(0)=0$.

3. Estudiar los mapas de fases de los sistemas lineales autónomos que tienen algún autovalor 0.

4. Dibujar el mapa de fases del sistema $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = y^2-x^2-4 \end{cases}$.
Identificar la órbita asociada a la solución con $x(0)=2$, $y(0)=0$ y describir la $x(t)$ de esta solución.

5. Sea [S] $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y-x^3 \end{cases}$. i) Dibujar el mapa de fases de [S] ii) Calcular la solución de [S] que cumple $x(0)=0$, $y(0)=1$.

6. Sea $x'' = -x[x^2+(x')^2]$. Hallar la órbita de su mapa de fases que pasa por el punto $(-1,0)$.
¿Es periódica la solución de la ecuación que satisface $x(\pi)=-1$, $x'(\pi)=0$?

7. Sea $\begin{cases} x' = 3y^2-3 \\ y' = 6x+4x^3 \end{cases}$. Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.
Determinar para qué valores de a es periódica la solución con $x(0)=0$, $y(0)=a$.

8. Sean: i) $\begin{cases} x' = x(x-2) \\ y' = (x-2y)(x-1) \end{cases}$, ii) $\begin{cases} x' = 1+y-x^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$.
Hallar sus órbitas, dibujar el mapa de fases y precisar si están definidas $\forall t$ las soluciones cuyas proyecciones sean semirrectas.

9. Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases de las ecuaciones: (i) $x'' = x\mathrm{e}^{-x^2}$, (ii) $x'' = -x\mathrm{e}^{-x^2}$.
Precisar en cada caso si es periódica la solución que verifica $x(1)=0$, $x'(1)=2$.

10. Sea la ecuación $x'' = (x - x^2)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Dibujar su mapa de fases.
Estudiar la estabilidad de las soluciones que satisfacen i) $x(0)=x'(0)=0$, ii) $x(0)=1$, $x'(0)=\mathrm{e}^{-1}$.

11. Sea $\begin{cases} x' = 2x-4y+ax^3+by^2 \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$.
Elegir a y b (no ambos cero) para los que haya un centro en el origen y dibujar el mapa de fases. Identificar en él órbitas que correspondan a soluciones i] inestables, ii] definidas para todo t.

12. Dibujar el mapa de fases tras escribir el sistema en coordenadas polares:

$\begin{array}{l} x' = y + x^3 + xy^2 \\ y' = -x + x^2y + y^3 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} x' = (x-y)(1-x^2+y^2) \\ y' = (x+y)(1-x^2+y^2) \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} x' = y + x^2y \\ y' = -x + xy^2 \end{array}$

13. Estudiar, según los valores de a, la estabilidad de la solución $x=0$ de las ecuaciones:

$x'' = a\,\mathrm{sen}\,x\cos x$ $\quad$ $x'' + ax' + \mathrm{e}^x = 1$ $\quad$ $x'' + x = a\,\mathrm{sen}(x')$ $\quad$ $x'' + ax^n = 0$, $n\in\mathbf{N}$

14. Sea $\begin{cases} x' = ay + bx^3 \\ y' = ax + by^3 \end{cases}$. i) Discutir según los valores de a y b la estabilidad de la solución $x=y=0$. ii) Discutir si existen soluciones no triviales que tiendan a 0 cuando $t \to \infty$.

15. Sea $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y-y^2 \end{cases}$. i] Hallar la ecuación de sus órbitas, determinar la curva del plano xy en la que esas órbitas poseen puntos de inflexión y dibujar el mapa de fases.
ii] Hallar la solución de [S] con $x(0) = y(0) = 2$. ¿Es estable? ¿Lo es la órbita $y(x)$ que define, vista como solución de la ecuación diferencial de las órbitas?

16. Sea $\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = x-y+x^2 \end{cases}$. Resolver la ecuación diferencial [o] de sus órbitas. Dibujar isoclinas y curvas integrales de [o] y el mapa de fases de [S]. Precisar si es estable el origen de [S] y si lo es la solución $y(x)$ de [o] que satisface $y(1)=1$.

17. Sea [S] $\begin{cases} x' = x^2+3y^2 \\ y' = -2xy \end{cases}$. Resolver la ecuación diferencial [o] de sus órbitas. Dibujar isoclinas y curvas de puntos de inflexión de [o] y el mapa de fases de [S]. ¿Está definida $\forall t$ la solución de [S] con $x(2)=1$, $y(2)=0$? ¿Es estable la solución de [S] con $x(2)=y(2)=0$?

18. Sean: i) $3x'x'' = 1$, ii) $x^2x'' = x'(xx'-2)$.
Hallar la solución general y la particular con $x(0)=x'(0)=1$.

19. Comparar las órbitas y las soluciones de los sistemas $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ y $\begin{cases} x' = y(x^2+y^2) \\ y' = -x(x^2+y^2) \end{cases}$.

20. Sea [e] la ecuación: a) $x'' = 4x - 3x'$, b) $x'' = x[1-(x')^2]$, c) $x'' = 2x^3$. Para los tres casos: i] Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases. ii] Si en $t=0$ es $x=x'=1$, ¿en que instante es $x=10^{10}$? iii] Estudiar la prolongabilidad de la solución $x(t)$ de [e] que satisface $x(0)=0$, $x'(0)=2$.

21. Clasificar los puntos críticos de la ecuación del péndulo rotatorio $x'' = \operatorname{sen} x(-1+w^2\cos x)$, según los valores de w . Dibujar el mapa de fases para $w=0$ (péndulo simple) y para $w=\sqrt{2}$.

22. Un péndulo se desplaza un ángulo $x \in (0,\pi)$ de su posición de equilibrio estable y se abandona. Hallar el periodo de la oscilación en función de una integral (se supone $g/l=1$).

23. El sistema $\begin{cases} x' = x(3-x-ay) \\ y' = y(3-y-ax) \end{cases}$, $a>0$, puede describir la evolución de las poblaciones x e y de dos especies animales en competición. Clasificar los puntos críticos elementales para $a>0$. Dibujar los mapas de fases para $a=\frac{1}{2}$, $a=1$ y $a=2$, e interpretarlos comparando los resultados.

24. a) Supongamos que $\begin{cases} x' = x(3-y) \\ y' = y(-1+x) \end{cases}$ describe la evolución de dos poblaciones animales en relación preadadora: x moscas, y murciélagos, por ejemplo. Dibujar e interpretar el mapa de fases. Comprobar que (según este modelo) es contraproducente emplear insecticida si éste mata también una proporción fija de los murciélagos existentes.
b) Si suponemos que hay un tope de población para las moscas la primera ecuación se convierte en $x'=x(3-ax-y)$. Dibujar e interpretar ahora el mapa de fases para $a=1$, $a=2$ y $a=4$.