

4. Mapas de fases

Los sistemas de ecuaciones no lineales casi nunca se pueden resolver. Pero para los **sistemas autónomos en el plano**, es decir, para los sistemas de la forma

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

es posible obtener las principales propiedades de sus soluciones a partir de su dibujo o, con más precisión, del dibujo de las proyecciones (llamadas **órbitas**) de estas soluciones sobre el plano xy o plano de fases (para dimensiones mayores las cosas se complican notablemente y pueden aparecer las llamadas soluciones caóticas). Este capítulo está dedicado a describir las diferentes técnicas destinadas a dibujar el conjunto de las órbitas de un sistema dado de la forma [S] sobre el plano de fases (su **mapa de fases**).

En la sección 4.1 se estudian las **propiedades básicas** de las soluciones y órbitas de estos sistemas autónomos. Se introduce la **ecuación diferencial de las órbitas** (que a veces es resoluble y da la expresión de dichas órbitas) y el **campo vectorial v** tangente a las órbitas (que siempre nos ayudará al pintar los mapas).

Se llaman **puntos críticos** de un mapa de fases a las proyecciones de las soluciones constantes del sistema (obtenidas haciendo $f = g = 0$). La sección 4.2 clasifica estos puntos en diferentes tipos (**nodos, puntos silla, focos, centros,...**) de acuerdo con la forma de las órbitas a su alrededor. Esta forma será en casi todos los casos similar a la de la **aproximación lineal**, sistema lineal (de órbitas fácilmente dibujables una vez hallados sus autovalores) obtenido despreciando los términos no lineales en el desarrollo de Taylor en torno al punto crítico del sistema inicial [S]. Las únicas excepciones se darán, tal vez, si la matriz de la aproximación lineal tiene autovalores imaginarios puros (centros) o si algún $\lambda = 0$ (puntos no elementales). En la sección se estudiarán además las propiedades particulares que poseen los mapas de fases de los sistemas que provienen de **ecuaciones autónomas** de segundo orden $x'' = g(x, x')$. En diversos ejemplos se mostrará como organizar adecuadamente toda la información anterior para dibujar las órbitas de sistemas concretos (clasificar los puntos críticos, intentar hallar las órbitas, localizar las curvas de pendiente horizontal y vertical, determinar los valores del campo adecuados, analizar como se deforman las 'separatrices' de los puntos silla...). Se verá también en esta sección que la **estabilidad** de las soluciones constantes es fácil de precisar (la de las no constantes es complicada) y se comprobará cómo (excepcionalmente) se pueden hallar algunas soluciones del sistema [S].

Un tipo particular de sistemas [S] que poseen propiedades adicionales que facilitan el dibujo de su mapa de fases son los **exactos** (aquellos con $f_x + g_y \equiv 0$), tratados en la sección 4.3. Para ellos siempre se podrá hallar la expresión de sus órbitas y sus puntos críticos elementales sólo podrán ser **puntos silla o centros** (lo que evita las dudas de la última situación). En el caso particular de las **ecuaciones exactas** $x'' = g(x)$ veremos que podemos dibujar su mapa de fases a partir, simplemente, del conocimiento de la llamada **función potencial**.

En la sección 4.4 daremos algunas otras ideas sobre cómo abordar el problema de ver si en el sistema no lineal sigue o no siendo un **centro** un punto crítico cuya aproximación lineal lo sea (análisis de **simetrías** de las órbitas y utilización de las coordenadas **polares**).

4.1 Sistemas de dos ecuaciones autónomas

Sea el sistema [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$, es decir, $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ y $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Suponemos que f y g y sus derivadas parciales son continuas en todo \mathbf{R}^2 . Sabemos que entonces existe una única solución de [S] que satisface cualquier par de datos iniciales $x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0$ (es decir $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$).

Los siguientes resultados, semejantes a los de las autónomas de primer orden, se prueban fácilmente:

Teor 1. Si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es solución (constante o de equilibrio) de [S]. Si $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es solución de [S] y $k \in \mathbf{R}$ entonces $\mathbf{x}(t+k) = \begin{pmatrix} x(t+k) \\ y(t+k) \end{pmatrix}$ es también solución de [S].

[Otros de los teoremas de 1.5 no se pueden trasladar directamente; por ejemplo las soluciones, en general, no son monótonas y las soluciones acotadas no tienden necesariamente hacia soluciones constantes].

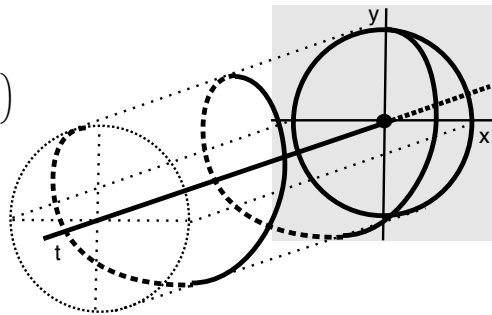
Cada solución $\mathbf{x}(t)$ de [S] es una curva en el espacio txy , pero también podemos mirarla como una curva en el plano xy (que llamaremos **plano de fases**) descrita paraméricamente en función de t . Esta segunda curva, a la que llamaremos **órbita** de la solución, es la proyección de la primera sobre el plano de fases. El objetivo de este capítulo es representar lo más aproximadamente posible el conjunto de órbitas de [S], es decir, el **mapa de fases** de [S]. Comencemos con un ejemplo:

Ej 1. Sea $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ (es decir $x'' + x = 0$).

La solución que cumple $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

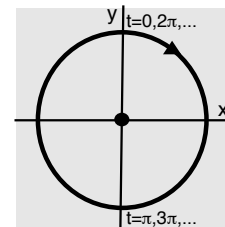
y la que satisface $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \text{sen } t \\ \text{cos } t \end{pmatrix}$.

Estas soluciones describen en el espacio la recta y la hélice del dibujo, y sus proyecciones sobre xy son el punto y la circunferencia del inferior [a un punto del mapa de fases, proyección de solución constante, se le llama **punto crítico** o **punto singular**].



Obtenemos las mismas órbitas si dibujamos en cada caso la curva trazada, al aumentar el parámetro t , por el punto de coordenadas $x=x(t), y=y(t)$. La flecha nos orienta la órbita, indicando el sentido en que se recorre.

Si imponemos $\mathbf{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenemos $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\text{sen } t \\ -\text{cos } t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}(t - \pi) \\ \text{cos}(t - \pi) \end{pmatrix}$.



La órbita de esta solución (cuya gráfica en el espacio es una traslación paralela al eje t de la hélice anterior) es la misma circunferencia de antes, si bien sus puntos son alcanzados para diferentes valores de t . Esta situación se da en cualquier sistema autónomo (pero no en un sistema cualquiera) y por eso tiene sentido dibujar su mapa de fases: si $x=x(t), y=y(t)$ son las ecuaciones de una órbita, otra parametrización de la misma órbita es $x=x(t+k), y=y(t+k)$ para cualquier k (aunque para un mismo t se obtengan valores de x e y diferentes). Dicho de otra forma: como las traslaciones de una solución hacia adelante y hacia atrás son también soluciones, las proyecciones de todas estas curvas del espacio son la misma órbita.

Normalmente no conoceremos las soluciones del sistema [S]. Para dibujar su mapa de fases trataremos de buscar información a partir de las propias funciones f y g . Intentemos primero hallar explícitamente las órbitas de [S]. Eliminando la t del sistema obtenemos la **ecuación diferencial de las órbitas**:

$$[o] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

(pues $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$, si lo permite el teorema de la función inversa).

Las curvas integrales de [o], quizás resoluble por los métodos de la sección 1.1 y dibujables por los de la 1.2, serán las órbitas de [S] (y al revés: una ecuación como [o] se puede mirar como un sistema y usar las ideas de esta sección para trazar sus curvas integrales). Como se ha eliminado la t , si dibujamos las órbitas sólo a partir de [o] éstas carecerán en principio de sentido de recorrido, pero será fácil orientarlas utilizando el campo \mathbf{v} que pronto introduciremos.

Resolviendo la ecuación [o] para el ejemplo 1 (lo que en este caso es posible) obtenemos de forma mucho más rápida sus órbitas:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \rightarrow x^2 + y^2 = C$$

Una información parecida a la que nos proporciona el campo de direcciones de [o] se obtiene tratando el **campo vectorial \mathbf{v}** dado en cada punto del plano por

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

[coincide con $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, vector tangente a la órbita en el punto (x, y)].

Por tanto, las órbitas de [S] serán curvas tangentes a (y recorridas en el sentido que indican) los vectores del campo \mathbf{v} (como se ve, este campo sólo se anula en los puntos críticos). Generalmente usaremos el campo \mathbf{v} para completar otras informaciones, pero aunque fallen todas las demás técnicas del capítulo siempre podremos dibujar algunos vectores de \mathbf{v} y hacernos una idea del mapa de fases.

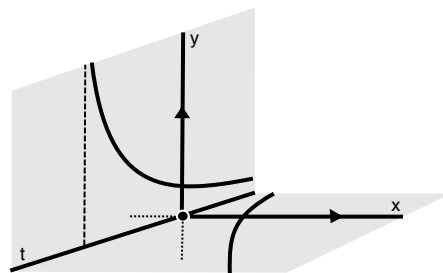
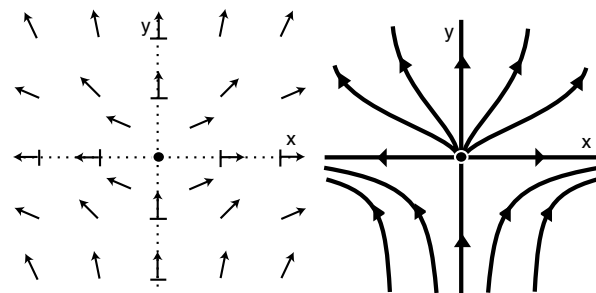
Ej 2. Repasemos lo visto con un ejemplo poco práctico por ser el sistema resoluble:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}, \quad \mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$$

El origen es el único punto crítico. Algunos vectores de \mathbf{v} (pintados con el mismo módulo pues nos interesa su dirección y sentido) son los del dibujo de la izquierda. Podemos también resolver la ecuación [o]:

$$y = [c - \ln|x|]^{-1}, \quad \text{o sea, } x = ce^{-1/y}.$$

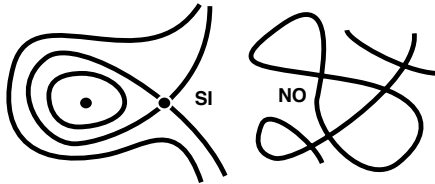
Con ello completamos el mapa de fases de la derecha. Cada órbita nos da los valores que toman la x y la y de la solución de la que es proyección, pero no nos dice en qué instante t los toman. Por ejemplo, la $x(t)$ de la solución con $x(0)=0$, $y(0)=1$ es 0 para todo t y podemos afirmar que la $y(t) = 29$ para un $t > 0$, pero sólo podemos hallar este t calculando $y(t)$ ($y(t) \rightarrow \infty$ pues si tendiese a un valor constante a se tendría, como en las autónomas de primer orden, que $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv a$ sería una solución constante, lo que es imposible por no existir más puntos críticos). Tampoco podemos saber si esta $y(t)$ está definida para todo $t \geq 0$. Pero resolviendo se tiene $y(t) = 1/(1-t)$, que explota en $t=1$ (sin embargo la solución $x(t) = e^t$, $y(t) = 0$, con otra órbita recta similar a la anterior, está definida para todo valor de t).



Demostremos otras propiedades generales de las órbitas:

Teor 2.

Por cada punto del plano de fases pasa una única órbita de [S]. Si una órbita se corta a sí misma corresponde a una solución periódica y dicha órbita es una curva cerrada simple.



(las órbitas no pueden cruzarse unas a otras, ni a sí mismas; sólo pueden ser de 3 tipos: puntos críticos, curvas cerradas simples y arcos simples (asociadas a soluciones constantes, periódicas y no periódicas); varias órbitas pueden confluir en un punto crítico, lo que no

viola la unicidad: corresponderán a soluciones que tienden a la solución constante cuando t tiende a $+$ o $-\infty$, pero que no la alcanzan en tiempo finito).

Dado un \mathbf{x}_0 , sea $\mathbf{x}(t)$ la solución con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Si para otra $\mathbf{x}^*(t)$ su órbita pasa por el mismo punto, debe ser $\mathbf{x}^*(t^*) = \mathbf{x}_0$ para algún t^* . Como $\mathbf{x}^*(t+t^*)$ es también solución y toma en $t=0$ el mismo valor que $\mathbf{x}(t)$ es, por unicidad, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t+t^*)$, o sea, $\mathbf{x}(t-t^*) = \mathbf{x}^*(t) \forall t$. Por tanto, $\mathbf{x}^*(t)$ es trasladada de $\mathbf{x}(t)$ y sus órbitas coinciden.

Sea $\mathbf{x}(t)$ solución no constante. Si su órbita se corta a sí misma ello significa que existe un primer $T > 0$ en el que vuelve a ser $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0)$. Utilizando la unicidad en $t=0$ se tiene que para todo t es $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$ y la solución es T -periódica y su órbita se repite cada T unidades de tiempo, formando una curva cerrada simple.

Hemos visto que la órbita de un sistema autónomo que pasa por un punto \mathbf{x}_0 del plano xy no depende del t_0 en el que la solución $\mathbf{x}(t)$ de la que es proyección satisface $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (es decir, que la evolución del sistema es independiente del momento en que empezemos a contar el tiempo, como era esperable al no depender f y g de t). Insistimos en que para un sistema no autónomo esto es falso, y no tiene sentido hablar de su mapa de fases.

4.2 Clasificación de puntos críticos

La mejor información sobre un mapa de fases nos la dará el conocimiento de la forma de sus órbitas cerca de un punto crítico. Tratamos primero los **sistemas lineales** (siempre resolubles y con mapas de fases fácilmente dibujables) y después, basándonos en ellos, los no lineales.

Sea: [L] $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$, o sea, $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Supondremos $|\mathbf{A}| \neq 0$ (con lo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ será el único punto crítico de [L] y $\lambda = 0$ no será autovalor). Clasificamos el origen según los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz \mathbf{A} :

Si λ_1 y λ_2 son **reales y distintos**, la solución general es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \text{ vector propio asociado a } \lambda_i.$$

Llamemos L_1 y L_2 a las rectas que contienen a \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 .

Cada L_i está formada por tres órbitas (obtenidas haciendo la otra $c_i = 0$): el punto crítico y dos semirrectas orientadas según sea el signo del λ_i .

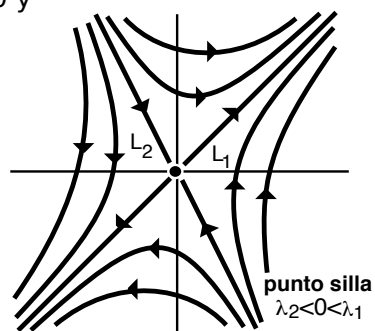
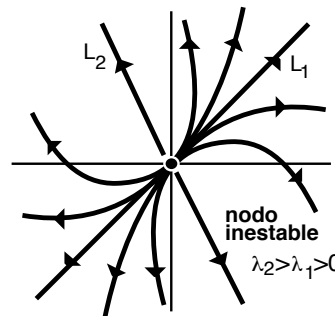
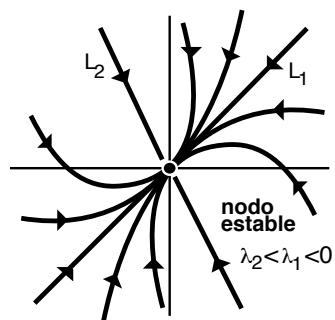
El vector unitario tangente a las órbitas $[\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}]$ es:

$$\mathbf{t} = \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2}{[c_1^2 \lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t} \|\mathbf{v}_1\|^2 + c_2^2 \lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t} \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2c_1 c_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{2(\lambda_1 + \lambda_2)t} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2]^{1/2}}$$

Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, todas las soluciones tienden a $\mathbf{0}$ y el vector $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|$ (si $c_1 \neq 0$) cuando $t \rightarrow \infty$. Todas las órbitas (menos dos) entran en el origen con la pendiente dada por el **vector propio asociado al λ más cercano a 0** y el punto crítico se llama **nodo estable**.

Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, se tiene la misma situación cambiando $+\infty$ por $-\infty$ y el origen se llama **nodo inestable**.

Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, las órbitas sobre L_2 se aproximan al origen y se alejan sobre L_1 . Las demás tienden asintóticamente a L_1 o L_2 según tienda t a $+\infty$ ó $-\infty$ adoptando la forma hiperbólica del dibujo de la derecha (no tienen por qué ser exactamente hipérbolas) y tenemos un **punto silla**.

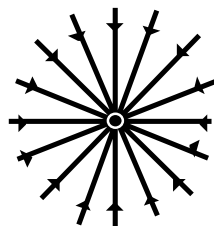


Si λ es **doble** y \mathbf{A} diagonal la solución es:

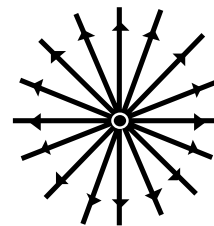
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Entonces, si $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) para cada par de constantes nos acercamos (alejamos) a $\mathbf{0}$ según una recta diferente y se dice que el punto es un **nodo estelar estable (inestable)**.

nodo estelar estable
 λ doble < 0 , \mathbf{A} diagonal



nodo estelar inestable
 λ doble > 0 , \mathbf{A} diagonal



[En este caso hubiera sido muy sencillo hallar las órbitas utilizando la ecuación [o]:

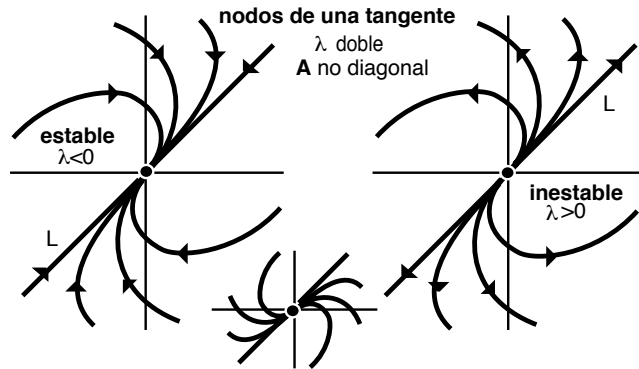
$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow y = Cx].$$

Si λ es **doble** y \mathbf{A} no es diagonal la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = [c_1 \mathbf{w} + (c_1 t + c_2) \mathbf{v}] e^{\lambda t},$$

con \mathbf{v} único vector propio asociado a λ .

Si $c_1 = 0$ estamos sobre la recta L generada por \mathbf{v} . Se ve, calculando el \mathbf{t} , que todas las demás órbitas entran en el origen siendo tangentes a una u otra de las semirrectas que forman L .



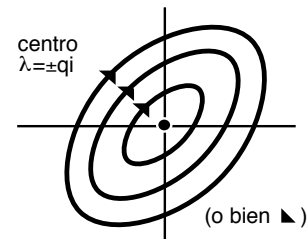
Si $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) sobre cada órbita nos acercamos (alejamos) al punto crítico, que se llama **nodo de una tangente estable (inestable)**. En los dos casos las órbitas pueden ser como en el dibujo pequeño (se distingue entre las dos posibilidades fácilmente mirando el campo \mathbf{v}).

Si los autovalores son **complejos** $\lambda = p \pm qi$, la solución es

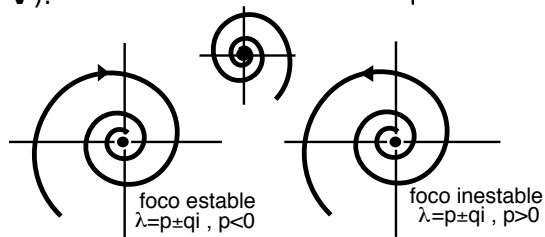
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos qt + c_2 \sin qt \\ c_3 \cos qt + c_4 \sin qt \end{pmatrix} e^{pt}, \quad c_i \text{ constantes}$$

reales de las cuales sólo dos son arbitrarias.

Si $p = 0$, todas las soluciones son periódicas y las órbitas son curvas cerradas rodeando el origen, que se llama **centro** (el sentido de giro lo da el campo \mathbf{v}).



Si $p < 0$, la exponencial decreciente obliga a las órbitas a cerrarse en espiral cuando $t \rightarrow \infty$ hacia el origen, que se llama **foco estable**. Si $p > 0$, las espirales corresponden a soluciones que se alejan del punto crítico que es un **foco inestable**.



La forma de las espirales podría ser también la del dibujo pequeño (como siempre esto se precisará a la vista del campo \mathbf{v}).

Dibujar las órbitas de sistemas lineales es muy sencillo con la clasificación anterior. Bastará (para nodos y sillas) con trazar las semirrectas órbitas orientadas y precisar el campo \mathbf{v} sobre algunas rectas que pasen por el origen, que son isoclinas de

$$[o] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}, \quad \text{ecuación homogénea.}$$

Por ejemplo, sobre los ejes, o sobre las rectas que nos proporcionen pendiente horizontal o vertical. Con esto (también en caso de centro o foco) basta para pintar el mapa de fases en todo el plano. Aunque, por ser [o] homogénea, sabemos que las órbitas son siempre calculables, normalmente no merecerá la pena calcularlas (pueden además salirnos expresiones no sencillas de dibujar).

Los sistemas que se han visto son homogéneos. Si hay términos no homogéneos (constantes para ser autónoma) y $|\mathbf{A}| \neq 0$ seguirá habiendo un punto crítico \mathbf{x}_0 , que haciendo el cambio $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ se trasladaría al origen manteniendo la matriz \mathbf{A} , con lo que, para analizarlo, basta hallar sus autovalores. Las isoclinas serán las rectas que pasen por \mathbf{x}_0 .

A pesar de su facilidad, la teoría de mapas de fases no es de especial interés para los sistemas lineales, pues podemos hallar sus soluciones. Pero la gran importancia de lo anterior es que nos permitirá deducir la forma de las órbitas cerca de los puntos críticos de los no lineales. Pero antes de hacer esto, dibujemos dos mapas de fases de lineales para ir practicando y dando algunos nombres:

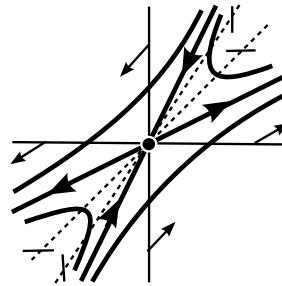
Ej 1. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ $\lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: punto silla.

Completamos esta información con el campo \mathbf{v} :

\mathbf{v} es **vertical** ($x' = 0$) si $y = \frac{3x}{2}$ y **horizontal** ($y' = 0$) si $y = x$.

Sobre los ejes: $\mathbf{v}(x, 0) = x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0, y) = -2y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[Resolviendo [0] se obtiene: $(2y-x)^2(y-2x) = C$, órbitas de aspecto hiperbólico, pero que no son hipérbolas].



A las órbitas que entran y salen de un punto silla se les llama separatrices, nombre natural, pues 'separan' comportamiento de las soluciones totalmente distintos. Por ejemplo, aquí las soluciones cuyas órbitas parten por debajo de $y = 2x$ cumplen que su $x(t) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$, mientras que $x(t) \rightarrow -\infty$ si parten por encima de la separtriz (sobre ella $x(t) \rightarrow 0$). Y algo análogo sucede con la otra separtriz $y = x/2$. Del mapa de fases (sin resolver el sistema) podríamos deducir también, por ejemplo, que para la solución que cumple $x(7) = 1$, $y(7) = 0$ tanto su x como su y tienden hacia ∞ cuando $t \rightarrow \infty$ y tienden hacia $-\infty$ cuando $t \rightarrow -\infty$: basta observar la forma de su órbita.

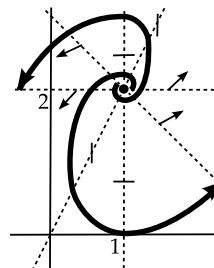
Ej 2. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2x - 2 \end{cases}$ El punto crítico es $x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Como $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, con $\lambda = 1 \pm i$, es un foco inestable.

\mathbf{v} es **vertical** si $y = 2x$ y **horizontal** si $x = 1$.

Además: $\mathbf{v}(x, 2) = 2(x-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x, 3-x) = (x-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

[0, si se prefiere, es el mapa de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ trasladado al punto].



Consideremos ya el sistema **no lineal** [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ y sea $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ punto crítico.

Desarrollando por Taylor f y g en torno a \mathbf{x}_0 y llevando luego este punto al origen con el cambio $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ (o lo que es lo equivalente, haciendo primero el cambio y desarrollando después en $u = v = 0$) se tiene:

$$\begin{cases} u' = f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + R_f(u, v) \\ v' = g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + R_g(u, v) \end{cases} \text{ con } R_f, R_g = o(\sqrt{u^2 + v^2}) \text{ si } u, v \rightarrow 0$$

Como R_f y R_g son pequeños esperamos que (cerca del origen que es ahora punto crítico) sean similares las órbitas de este sistema y las de la **aproximación lineal** obtenida ignorando los términos no lineales. El siguiente teorema precisará que esto es cierto si el lineal es de cualquiera de los tipos clasificados anteriormente, salvo en el caso de los centros.

Llamemos [L] al sistema $\mathbf{u}' = \mathbf{M}\mathbf{u}$, con $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

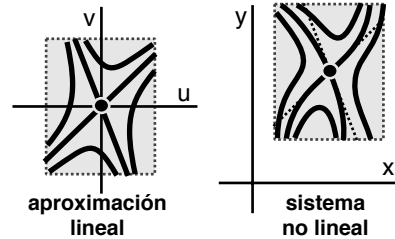
Suponemos $|\mathbf{M}| \neq 0$. Diremos entonces que \mathbf{x}_0 es **punto crítico elemental** de [S]. El teorema de la función implícita asegura que \mathbf{x}_0 es **aislado** (hay un entorno de \mathbf{x}_0 en el que no hay más puntos críticos; un punto con $|\mathbf{M}| = 0$ puede no ser aislado y si lo es no se parece al origen de [L], no aislado).

Teor 1.

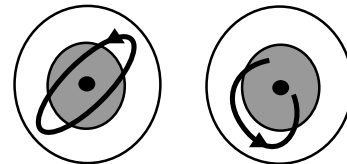
Si el origen es **nodo**, **punto silla** o **foco** de [L] entonces \mathbf{x}_0 es un punto crítico del mismo tipo y la misma estabilidad de [S]. Si el origen es **nodo estelar** o **de una tangente** de [L] y las funciones f y g tienen derivadas parciales de segundo orden continuas entonces \mathbf{x}_0 es nodo del mismo tipo (y estabilidad) del sistema no lineal [S]. Las órbitas rectas que en los nodos y puntos sillas de [L] llegan o salen del origen se deforman, en general, en curvas de [S] que llegan o salen de \mathbf{x}_0 , pero manteniendo la tangencia dada por los vectores propios de [L]. Si el origen es **centro** de la aproximación lineal y las funciones f y g son analíticas entonces \mathbf{x}_0 es o un centro, o un foco estable o un foco inestable en el sistema no lineal.

La demostración del teorema es complicada y no la damos. No es extraño que sean los centros los únicos puntos críticos elementales que no se conservan pues los pequeños términos no lineales pueden hacer que las órbitas dejen de cerrarse sobre sí mismas. De otra forma: una pequeña perturbación puede apartar los $\lambda = \pm qi$ del eje imaginario. Por la misma razón podría pensarse que también puede separar dos λ iguales, pero si f y g son regulares esto no sucede (si no lo son puede cambiar el nodo en uno de otro tipo o en un foco).

Así pues, analizando sistemas lineales sabemos, casi siempre, cómo son las órbitas de uno no lineal en un entorno de cada punto crítico (lejos de él serán totalmente diferentes de las del lineal). Este es el paso principal hacia el dibujo del mapa de fases de [S]. En muchos problemas físicos, además, precisamente lo que se busca es el comportamiento de sus soluciones cerca de las de equilibrio. Para ver en cada caso cómo se deforman las órbitas de la aproximación lineal en el no lineal (por ejemplo, el sentido en el que se doblan las separatrices de un punto silla) y obtener datos sobre el mapa global habrá que utilizar el campo \mathbf{v} (y las órbitas en el caso excepcional de que sean calculables). En los ejemplos iremos viendo cómo organizar este trabajo.



Es fácil extraer del teorema conclusiones sobre la **estabilidad de las soluciones de equilibrio**, muy parecidas a las vistas para las ecuaciones autónomas de primer orden. El significado geométrico sobre el plano de fases de esta estabilidad es claro: \mathbf{x}_0 es estable si las órbitas que parten suficientemente cerca no se salen de cualquier círculo de radio prefijado. Es asintóticamente estable si además tienden a \mathbf{x}_0 cuando $t \rightarrow \infty$.



Teor 2.

Si los autovalores de \mathbf{M} tienen $\text{Re}\lambda < 0$, \mathbf{x}_0 es solución de equilibrio asintóticamente estable de [S]. Si alguno de los autovalores tiene parte real positiva, \mathbf{x}_0 es inestable.

Como siempre queda la duda de qué pasa si $\text{Re}\lambda = 0$ (para un punto con un $\lambda = 0$ y otro $\lambda > 0$ se prueba que es inestable, aunque esto no se deduzca del teorema 1). La inestabilidad de algunas soluciones no constantes es clara a la vista de un mapa de fases: si las órbitas se alejan, también lo hacen las soluciones de las que son proyección. Pero la estabilidad no se ve en el dibujo: órbitas próximas pueden corresponder a soluciones muy diferentes (por ejemplo las órbitas de un sistema lineal con un punto silla se pegan entre sí y sin embargo todas las soluciones son inestables).

Pasemos ya a hacer ejemplos de dibujo de mapas de fases de sistemas no lineales (los de centros de la aproximación lineal se verán en las dos secciones siguientes). Primero hallaremos los posibles **puntos críticos** resolviendo $f(x, y) = g(x, y) = 0$ (en los ejemplos que siguen se podrá hacer, pero podría ser sistema no resoluble). Evaluaremos la matriz \mathbf{M} en cada punto para clasificarlo y dibujaremos en torno a cada silla o nodo rectas con la pendiente dada por los vectores propios.

Si podemos resolver la ecuación diferencial de las **órbitas**, dibujaremos algunas de ellas (al menos las más sencillas y nos esforzaremos con las separatrices).

Utilizaremos el campo \mathbf{v} para completar la información anterior. Habitualmente:

- Buscaremos las curvas en que \mathbf{v} es **horizontal** o **vertical** ($g=0$ y $f=0$).
- Evaluaremos \mathbf{v} en los **ejes** (es muy fácil hacer $x=0$ ó $y=0$) y en **rectas que pasan por los puntos críticos** (no es raro que adopten formas sencillas, pues en los puntos críticos es donde se anulan tanto f como g).
- Para ver **cómo se deforman las separatrices** miraremos \mathbf{v} sobre las rectas que indica la aproximación lineal.
- Por último, daremos valores sueltos de \mathbf{v} en zonas en que haya pocos datos.

Ej 3. $\begin{cases} x' = 8x - y^2 \\ y' = -6y + 6x^2 \end{cases}$ $x(8-x^3)=0 \rightarrow (0), (2)$. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2y \\ 12x & -6 \end{pmatrix}$ en cada punto es:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ es silla con $\lambda = 8 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = -6 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$ es foco inestable ($\lambda = 1 \pm i\sqrt{143}$).

Completamos la información local con el campo \mathbf{v} (las órbitas no son calculables). El campo es **horizontal** y **vertical** en este caso en

$$y = x^2, \quad 8x = y^2, \quad \text{respectivamente.}$$

Para las **separatrices** hallamos \mathbf{v} sobre las rectas dadas por la aproximación lineal, que aquí son los ejes:

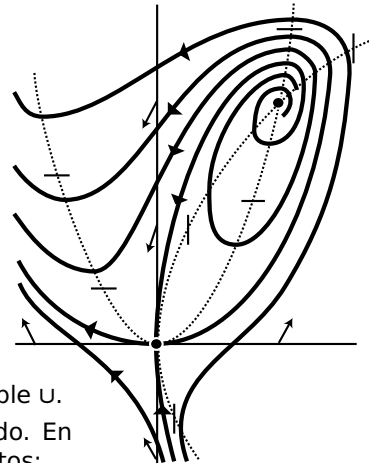
$$\mathbf{v}(x, 0) = 2x \begin{pmatrix} 4 \\ 3x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0, y) = -y \begin{pmatrix} y \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Según esto, la separatriz estable se deforma \subset y la inestable \cup .

El \mathbf{v} sobre los **ejes** en este ejemplo ya lo hemos hallado. En **rectas que pasan por (2, 4)** y en un punto con pocos datos:

$$\mathbf{v}(x, 4) = 2(x-2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3x+6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(2, y) = (4-y) \begin{pmatrix} 4+y \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(-2, -2) = 4 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Los vectores dibujados precisan también el sentido en el que se abre el foco y con todo ello tenemos un mapa de fases más o menos como el de arriba. No sabemos resolver el sistema, pero están a la vista propiedades básicas de las soluciones (por ejemplo, que las soluciones constantes son inestables, lo que estaba claro desde que hallamos los λ).



Ej 4. $\begin{cases} x' = y(x-2) \\ y' = x(y-2) \end{cases} \rightarrow (0), (2)$ críticos. Aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} y & x-2 \\ y-2 & x \end{pmatrix}$ en cada uno:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: silla.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 2$ doble y nodo estelar inestable.

Usamos ahora \mathbf{v} (órbitas calculables, pero complicadas):

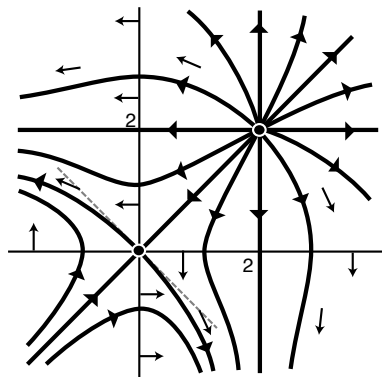
\mathbf{v} es **vertical** si $y=0$ o si $x=2$ ($\Rightarrow x=2$ órbita recta (más exactamente: está formada por tres órbitas)).

\mathbf{v} es **horizontal** si $x=0$, $y=2$ ($\Rightarrow y=2$ órbita). Además:

$$\mathbf{v}(x, x) = x(x-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} y=x \\ \text{órbita} \end{matrix} \quad \mathbf{v}(x, -x) = -x \begin{pmatrix} x-2 \\ x+2 \end{pmatrix} \quad (\text{se curva})$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0, y) = \begin{pmatrix} -2y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(1, 3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(3, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(-1, 3) = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(3, -1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(3, 4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(4, 3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Excepcionalmente, la separatriz $y=x$ del lineal se conserva, aunque la otra se deforma.

Veamos algunas propiedades de las **soluciones** que se deducen del mapa de fases:

El segmento que une los puntos críticos corresponde a una solución **definida** $\forall t$ (ya que está acotada y no puede irse a infinito en tiempo finito). Esta solución es **inestable**, pues mientras ella tiende a $\mathbf{0}$ la x o la y de algunas cercanas $\rightarrow -\infty$.

No podemos saber de casi todas las soluciones no constantes si están o no definidas $\forall t$ ni precisar su estabilidad, pues **no tenemos la solución general**.

Sí **podemos hallar soluciones asociadas a órbitas sencillas**. Por ejemplo, si buscamos la que cumple $x(0)=1$, $y(0)=2$, empezamos encontrando la órbita que pasa por $(1, 2)$ (o sea, que cumple $y(x=1)=2$). Es claro aquí que esa órbita es $y=2$, que llevada a la primera ecuación nos da $x' = 2x - 4$, $x(0)=1 \rightarrow x = 2 - e^{2t}$, $y=2$, definida $\forall t$, aunque no sabemos si es estable por no conocer las cercanas. En cambio, la solución con $x(0)=y(0)=3 \rightarrow y=x \rightarrow x' = x^2 - 2x$, explota en tiempo finito (por la potencia x^2 ; podríamos hallarla).

[La solución general de un sistema no lineal casi nunca se tendrá pues han de darse muchas casualidades: **que las órbitas sean calculables, que se pueda despejar** de ellas la x o la y , y **que se pueda hallar explícitamente la solución** de la autónoma que queda al sustituir].

Ej 5. $\begin{cases} x' = x(2-x-y) \\ y' = y(3-y-2x) \end{cases}$ Puede describir la evolución de la población de dos especies en competición. En ausencia de la otra especie cada una de ellas sigue una ecuación logística, y además la presencia de cada una influye negativamente en el crecimiento de la otra (términos en xy de cada ecuación); dibujamos sólo en el primer cuadrante, que es donde las órbitas tienen sentido.

$$x(2-x-y)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0, 3 \\ y=2-x \rightarrow x=2, 1 \rightarrow y=0, 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ puntos críticos.}$$

La aproximación lineal $\begin{pmatrix} 2-2x-2y & -x \\ -2y & 3-2y-2x \end{pmatrix}$ en cada punto:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nodo: } \lambda=2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (captura la tangencia)}, \lambda=3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nodoE: } \lambda=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ (tangencia)}, \lambda=-3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nodoE: } \lambda=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (tangencia)}, \lambda=-2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda=-1 \pm \sqrt{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \text{punto silla.} \end{aligned}$$

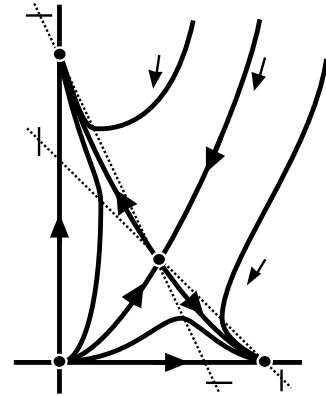
\mathbf{v} es **vertical** si $x=0$ o si $y=2-x$ ($\Rightarrow x=0$ órbita).

\mathbf{v} es **horizontal** si $y=0$, $y=3-2x$ ($\Rightarrow y=0$ órbita).

Valores de \mathbf{v} sobre rectas que contienen puntos críticos:

$$\mathbf{v}(x, 3) = -x \begin{pmatrix} x+1 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2, y) = -y \begin{pmatrix} 2 \\ y+1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(x, 1) = (1-x) \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(1, y) = (1-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 3y \end{pmatrix}.$$

Si los datos iniciales están por encima de la separatriz estable de la silla, la especie y tiende hacia su tope logístico y la x se extingue; lo contrario sucede si están por debajo. Si los términos de competición (los $-axy$) fuesen más pequeños las dos especies podrían coexistir (los nodos estables se vuelven sillas y pasa a existir un nodo estable en $x, y > 0$ hacia el que tienden todas las soluciones del primer cuadrante; esto sucede, por ejemplo, en el sistema $x' = x(2-x-y/2)$, $y' = y(3-y-x)$, para el que $x=1, y=2$ es nodo estable). Las únicas soluciones calculables serían las asociadas a $x=0$ o a $y=0$, es decir, a la ausencia de una de las dos especies. Aparece entonces la ecuación logística cuyas soluciones son coherentes con las órbitas sobre los ejes.



Un ejemplo con punto no elemental (como no tenemos teoría para ver como son las órbitas cerca del punto, nos tendremos que basar en la ecuación de sus órbitas y en el campo \mathbf{v}):

Ej 6. $\begin{cases} x' = 3xy \\ y' = 4y^2 - 4x^2 \end{cases}$ Único punto crítico: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto es un punto no elemental. La ecuación [o]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - 4x^2}{3xy} \text{ es resoluble (homogénea o Bernouilli)} \rightarrow y^2 = 4x^2 + Cx^{8/3} \text{ (si } C=0 \text{ se tienen las rectas } y = \pm 2x \text{).}$$

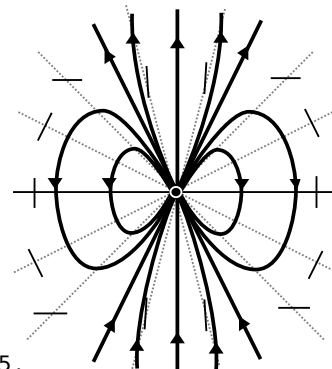
Mejor que dibujar estas curvas, usamos las isoclinas, que son (ecuación homogénea) rectas $y=mx$ pasando por el origen. La pendiente de las órbitas sobre ellas es:

$$K = \frac{4m^2 - 4}{3m} \rightarrow \text{para } m=0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4 \text{ es } K = \infty, \pm 2, 0, \pm 2, \pm 5.$$

Orientamos las órbitas viendo que $\mathbf{v}(0, y)$ apunta hacia arriba (esto además nos da las órbitas verticales no recogidas en la solución general). Hay órbitas (llamadas elípticas) que salen y llegan al punto crítico, situación imposible en uno elemental.

[Un punto no elemental aislado es o un centro o un foco o hay en torno a él sectores formados por órbitas elípticas, parabólicas (las de un nodo o las demás del ejemplo) o hiperbólicas (como las de un punto silla)].

Alguna conclusión sobre las soluciones: $\mathbf{0}$ es inestable (viendo el dibujo); la solución con $x(0) = 1, y(0) = 2$ (de órbita $y = 2x$) no está definida $\forall t > 0$, pues para ella se tiene $x' = 6x^2, y' = 3y^2$; la que cumple $x(0) = 1, y(0) = 0$ (no calculable) sí lo está por ser acotada, pero ¿será estable? (su diferencia con las soluciones cercanas tiende a $\mathbf{0}$ si $t \rightarrow \infty$, pero esto no basta en sistemas).



Todo lo dicho sobre sistemas se puede, desde luego, aplicar al caso particular de las **ecuaciones autónomas** (su mapa de fases es el del sistema equivalente):

Sea [e] $x'' = g(x, x')$, o escrita en forma de sistema: [SE] $\begin{cases} x' = v \\ v' = g(x, v) \end{cases}$

(usamos la variable v porque en muchos problemas físicos será una velocidad).

La matriz de la aproximación lineal es $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_x & g_v \end{pmatrix}$, evaluada en cada punto crítico.

La ecuación de las órbitas y el campo \mathbf{v} tienen la forma:

[o] $v \frac{dv}{dx} = g(x, v)$, $\mathbf{v}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ g(x, v) \end{pmatrix}$

Las propiedades particulares de los mapas de fases de ecuaciones son inmediatas:

- Los puntos críticos de [e] están sobre el eje $v=0$ [y las x de esos puntos son los ceros de $g(x, 0)$].
- Las órbitas se dirigen hacia la derecha en el semiplano superior y hacia la izquierda en el inferior.
- Las órbitas que cortan el eje $v=0$ lo hacen perpendicularmente.
- Las ecuaciones no poseen nodos estelares.
- Un vector propio asociado a un autovalor λ es $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Ej 7. Dibujemos el mapa de fases de la ecuación: $x'' = x - x^3 - xx'$.

$\begin{cases} x' = v \\ v' = x - x^3 - xv \end{cases}$. Puntos críticos $v=0$
 $x=0, \pm 1$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2-v & -x \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \nearrow \lambda = \frac{1}{2} [\mp 1 \pm i\sqrt{7}] \text{ focoE} \\ \searrow \lambda = \pm 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \text{ silla} \end{matrix}$

El campo es horizontal si: $v=1-x^2$ o si $x=0$.
[Es vertical si $v=0$ (como en toda ecuación)].

\mathbf{v} será sencillo sobre $x=\pm 1$: $\mathbf{v}(\pm 1, v) = \begin{pmatrix} v \\ \pm v \end{pmatrix}$,

Para analizar la deformación de las separatrices:

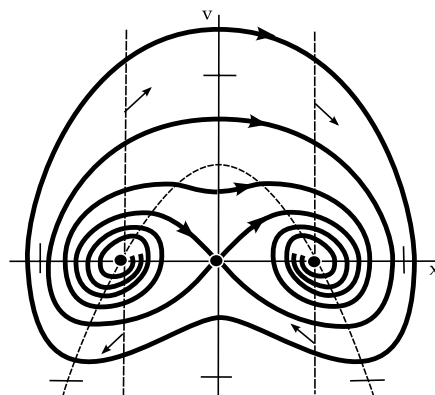
$\mathbf{v}(x, \pm x) = x \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \mp x - x^2 \end{pmatrix}$ (los \mathbf{v} con x pequeño indican que se curvan según el dibujo).

[La parábola de pendiente horizontal ya nos lo aseguraba para las separatrices de $v > 0$].

La ecuación de las órbitas $\frac{dv}{dx} = \frac{x-x^3}{v} - x$ no es de ningún tipo resoluble conocido.

Los vectores del campo \mathbf{v} son simétricos respecto al eje v (por ser g impar en x , sus pendientes en $(-x, v)$ y en (x, v) tienen signo opuesto). Entonces sus órbitas también serán **simétricas** respecto a $x=0$. Esta simetría obliga a las órbitas a cerrarse.

Gracias al mapa de fases deducimos que hay dos tipos esenciales de soluciones de esta ecuación no resoluble: unas son periódicas y otras tienden a ± 1 cuando $t \rightarrow \pm \infty$. Pero sin las órbitas no podemos, por ejemplo, decir exactamente para qué datos iniciales son de uno u otro tipo, o dar una expresión que nos permita calcular los periodos.



Los dos ejemplos siguientes (a diferencia del anterior), pueden describir sistemas físicos. Dibujaremos su mapa de fases e interpretaremos algunas de sus órbitas. Incluso aunque la ecuación sea lineal (como el primero que veremos) y, por tanto, resoluble, se pueden sacar conclusiones muy rápidas sobre las soluciones a partir de las órbitas.

Ej 8. $x''+2ax'+x=0$, con $a \geq 0$ [sistema muelle-masa con rozamiento (si $a > 0$)].

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -x - 2av \end{cases} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ \u00fanico punto cr\u00edtico } \forall a. \lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0: \lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \rightarrow$$

Si $a=0$, el origen es un centro ($\lambda = \pm i$ y el sistema es lineal).

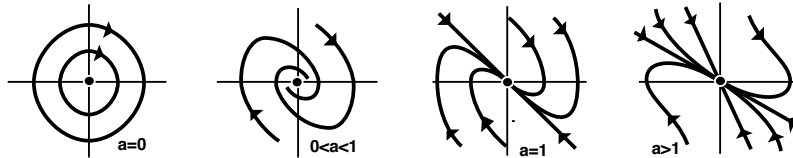
Si $0 < a < 1$, es un foco estable (autovalores complejos con $\text{Re}\lambda < 0$).

Si $a=1$, es un nodo de una tangente estable (con $\lambda = -1$ doble).

Si $a > 1$, es un nodo estable ($\lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1} < -1 < \lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} < 0$).

Con alguna informaci\u00f3n m\u00e1s (el campo \mathbf{v} sobre $x=0$ y los puntos en que es horizontal $x = -2av$) podemos ya dibujar los mapas de fases. Como en todo sistema lineal se pueden hallar las \u00f3rbitas, pero son complicadas y dicen poco. Un peque\u00f1o dato adicional es que no hay puntos de inflexi\u00f3n (se ve que esto ocurre para todo sistema lineal):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{v^2 + 2axv + x^2}{v^3} = 0 \rightarrow v = (-a \pm \sqrt{a^2 - 1})x, \text{ \u00f3rbitas rectas.}$$



En cada caso el origen representa la soluci\u00f3n trivial asociada a la posici\u00f3n de equilibrio estable de la masa en reposo en $x=0$. Si $a=0$ (no hay rozamiento), cada \u00f3rbita cerrada describe un movimiento oscilatorio no amortiguado en torno a $x=0$: si, por ejemplo, la masa est\u00e1 inicialmente en $x=0$ con velocidad $v > 0$, empieza a aumentar x hasta su valor m\u00e1ximo en el instante en que $v=0$; disminuye despu\u00e9s la x (el valor absoluto $|v|$ tiene un m\u00e1ximo y luego decrece cuando el movimiento es contra la fuerza del muelle); avanza hasta llegar a $x=0$ con la misma velocidad inicial y repite indefinidamente el movimiento. Si $0 < a < 1$ (rozamiento escaso), pasa infinitas veces por $x=0$, pero la amplitud de la oscilaci\u00f3n va tendiendo a 0 con el tiempo. Si $a \geq 1$ (fuerte rozamiento), las \u00f3rbitas describen movimientos que tienden hacia $x=0$, pero no son posibles las oscilaciones. Dependiendo de su posici\u00f3n y velocidad iniciales, o la masa tiende indefinidamente hacia la posici\u00f3n de equilibrio sin llegar a superarla, o la cruza una sola vez.

Ej 9. $x'' = x^2 + 3x - 4x'$ Puede describir el movimiento de una part\u00edcula sobre el eje x , sometido a una fuerza $x^2 + 3x$ que s\u00f3lo depende de su posici\u00f3n y con un rozamiento $-4x'$ proporcional a su velocidad. En forma de sistema:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = x^2 + 3x - 4v \end{cases} \rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x+3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Evaluando la aproximaci\u00f3n lineal en los dos puntos cr\u00edticos que hay se tiene:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -1, -3 \text{ nodo E.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{7}, \text{ silla.}$$

\mathbf{v} horizontal sobre la par\u00e1bola $v = \frac{x^2 + 3x}{4}$.

M\u00e1s valores de \mathbf{v} (rectas con puntos cr\u00edticos y puntos sobre rectas del nodo lineal):

$$\mathbf{v}(-3, v) = v \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-4, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-4, 3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-2, -1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-2, -3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Sabemos ya como se curvan las rectas del nodo. Evaluando $\mathbf{v}(x, \lambda x)$ se ve, tras unos c\u00e1lculos, que las separatrices se deforman de la forma indicada y completamos el dibujo.

El sentido de las fuerzas es: $\rightarrow -3 \leftarrow 0 \rightarrow$ (por eso -3 es estable y 0 inestable). Supongamos la part\u00edcula inicialmente entre -3 y 0 y discutamos su movimiento seg\u00fan su velocidad v_0 inicial. Si $v_0 < 0$, tiende hacia el equilibrio estable. Si $v_0 > 0$ y peque\u00f1o, no puede superar la fuerza que se opone, llega a un x m\u00e1ximo, regresa y tiende hacia -3 . Si $v_0 > 0$ y gordo consigue cruzar $x=0$ y, ayudado por la fuerza, tiende a ∞ (\u00bfen tiempo finito?) mientras aumenta su velocidad. Si $v_0 > 0$ es tal que estamos sobre la separatriz del punto silla tenemos un movimiento imposible en la pr\u00e1ctica: acercarse sin cesar al equilibrio inestable. El problema (las \u00f3rbitas no son calculables) es que es imposible hallar exactamente este \u00faltimo v_0 (y ser\u00eda importante porque para valores superiores e inferiores de la velocidad los movimientos son radicalmente diferentes).

Ej 10. Discutamos, según los valores de b , la estabilidad de la solución $x=0$ de la ecuación

$$x'' = bx - 2x' + (x')^2 .$$

Como asegura el teorema 2, la estabilidad de una solución constante hereda (salvo las excepciones de los centros o los puntos no elementales), la de su aproximación lineal, dada por la parte real de sus autovalores. En nuestro caso tenemos:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = bx - 2v + v^2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & -2 \end{pmatrix} , \text{ aproximación lineal en el origen.}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - b = 0 \rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1+b} \rightarrow$$

Si $b > 0$ el origen es **inestable**, pues hay $\lambda > 0$ (y el otro es < 0 ; es un punto silla).

Si $b < 0$, los dos autovalores tienen parte real negativa, con lo que $x=0$ es **asintóticamente estable** (de hecho, si $b < -1$ es un foco E, si $b = -1$ es un nodo de una tangente E y si $-1 < b < 0$ es un nodo E).

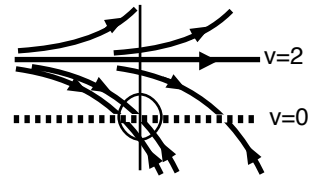
[Que conste que el criterio de Routh-Hurwitz aplicado a $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ dice que sus raíces tienen $\text{Re}\lambda < 0$ si y sólo si ambos coeficientes son estrictamente positivos, con lo que nos podíamos haber ahorrado hasta el cálculo de los λ].

Si $b = 0$ aparece un $\lambda = 0$ y el teorema 2 no nos dice nada. Intentamos verlo haciendo el dibujo de sus órbitas:

Para $\begin{cases} x' = v \\ v' = -2v + v^2 \end{cases}$ la recta $v=0$ está formada por puntos críticos (no elementales, claro, pues los elementales son aislados).

Pero sus órbitas son muy sencillas: $\frac{dv}{dx} = v-2 \rightarrow v = 2 + Ce^x$.

De ellas, del sentido de las ecuaciones (hacia la derecha arriba, hacia la izquierda abajo) y de los puntos críticos hallados se deduce el dibujo de su mapa de fases. Y como se puede observar en él, el origen (y cualquiera de los otros) es punto crítico **estable no asintóticamente** (las órbitas que parten lo suficientemente cerca no se salen de un entorno, pero no tienden [salvo 2] hacia el punto).



4.3 Sistemas y ecuaciones exactos

Un sistema del tipo [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ se llama **exacto** si $f_x(x, y) + g_y(x, y) \equiv 0$.

(suponemos que f y g son de clase 1 en todo \mathbf{R}^2 como hicimos en la sección 4.1).

Si [S] es exacto, la ecuación diferencial de sus órbitas

$$[o] \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \text{ es decir, } -g(x, y) + f(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

es también exacta, y por tanto resoluble:

Existe $H(x, y)$ tal que $f = H_y$ y $g = -H_x$, y las órbitas de [S] vienen dadas por $H(x, y) = C$.

Además se tiene el siguiente resultado sobre sus puntos críticos:

Teor 1. Los puntos críticos elementales de un sistema exacto sólo pueden ser centros o puntos silla.

Como $f_x + g_y \equiv 0$, los λ de la matriz de la aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_o}$

en cualquier punto \mathbf{x}_o crítico vienen dados por $\lambda^2 + |\mathbf{M}| = 0$, con lo que o bien (si $|\mathbf{M}| < 0$) tiene dos raíces reales de distinto signo y \mathbf{x}_o es un punto silla (tanto del sistema lineal como del no lineal) o bien (si $|\mathbf{M}| > 0$) las raíces son imaginarias puras y se tiene un centro en la aproximación lineal. Además es fácil ver, por ser H continua, que $H(x, y) = H(x_o, y_o)$ contiene además del punto \mathbf{x}_o todas las órbitas que tienden a dicho punto cuando t tiende a $+\infty$ o $-\infty$, con lo que el sistema [S] no puede tener focos (pues sería $H \equiv \text{cte}$ y $\mathbf{M} \equiv \mathbf{0}$ en todo un entorno y el punto no sería aislado) y los centros del lineal lo son también en el no lineal.

Ej 1. $\begin{cases} x' = x - 2xy \\ y' = x - y + y^2 \end{cases} = 0 \rightarrow x=0; y=\frac{1}{2} \downarrow y=0, 1; x=\frac{1}{4}. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-2y & -2x \\ 1 & 2y-1 \end{pmatrix}$ en cada punto:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 1: \text{ sillares}; \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}: \text{ centro de la aproximación lineal.}$$

Como sabemos este centro podría conservarse o ser un foco E o I de nuestro sistema. Pero como es exacto: $f_x + g_y = 1 - 2y - 1 + 2y \equiv 0$, sigue siendo centro del no lineal.

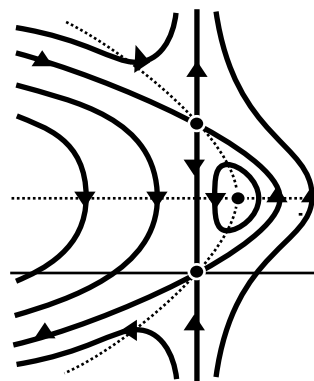
$$H_x = -x + y - y^2, H_y = x - 2xy \rightarrow H(x, y) = xy - xy^2 - \frac{x^2}{2} = C \text{ son las órbitas.}$$

Dibujar todas las curvas $H = C$ es complicado (aunque se podría despejar la x o la y de la ecuación de segundo grado). Pero para $C = 0$ obtenemos dos muy sencillas $x = 0$ y $x = 2(y - y^2)$, cada una de ellas formada por cinco órbitas distintas, entre ellas todas las separatrices.

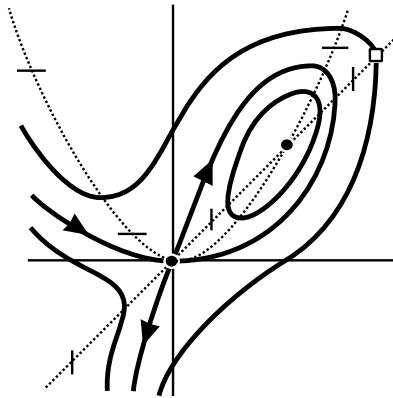
El campo \mathbf{v} es horizontal sobre $x = y - y^2$ y vertical en la órbita $x = 0$ y en la recta $y = 1/2$.

Podemos dibujar ya las órbitas, si bien aún no están orientadas. Para ello basta dar algún valor a \mathbf{v} o fijarse en algún vector propio de los puntos sillares. Por ejemplo, podemos hallar:

$$\mathbf{v}(x, 0) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ó } \mathbf{v}(x, 1) = x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Ej 2. $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = y - x^2 \end{cases}$ Dibujemos su mapa de fases y estudiemos si es periódica la solución con $x(0)=y(0)=2$.



$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$. Puntos críticos: $y=x \rightarrow x-x^2=0 \rightarrow x=y=0, 1$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es silla $[\lambda = \pm 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es centro del lineal. Como $f_x+g_y = -1+1=0$, el sistema es exacto y el centro se conserva.

Las órbitas son: $\begin{matrix} H_x = x^2 - y \\ H_y = y - x \end{matrix} \rightarrow \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2} = C$.

\mathbf{v} es horizontal sobre $y=x^2$ y vertical en $y=x$.

Las separatrices (curvas por $(0,0) \rightarrow C=0$) son:

$$y^2 - 2xy + \frac{2}{3}x^3 = 0 \rightarrow y = x \pm x\sqrt{1 - \frac{2x}{3}}$$

definidas para $x \leq \frac{3}{2}$ (para $x = \frac{3}{2}$ se juntan en $y=x$).

Como la órbita que pasa por $(2, 2)$ está fuera del lazo que forma la separatriz, la solución de la que es proyección **no** es periódica.

[Como siempre, la información que se obtiene de la aproximación lineal es sólo local: en un entorno del centro hay seguro órbitas cerradas, pero lejos de él dejarán normalmente de serlo, como en este ejemplo (y el anterior)].

Ej 3. $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = 1 + 3x^2 - y^2 \end{cases}$ Puntos críticos: $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 6x & -2y \end{pmatrix}$.

\mathbf{M} en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, silla.

\mathbf{M} en $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, silla.

Las órbitas se hallan fácilmente por ser exacto:

$$\begin{aligned} H &= xy^2 - x^3 - x + p(y) \rightarrow xy^2 - x^3 - x = C \\ H &= xy^2 + q(x) \end{aligned}$$

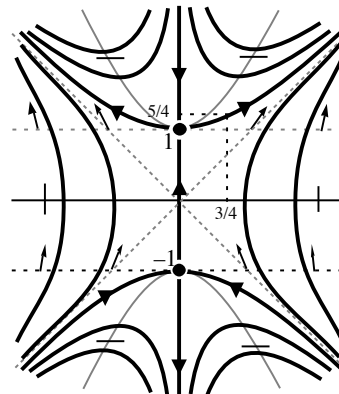
[También es de Bernoulli (más largo):

$$2yy' = -\frac{y^2}{x} + \frac{1+3x^2}{x} \xrightarrow{z=y^2} z' = -\frac{z}{2x} + \frac{1+3x^2}{x}, z \stackrel{\uparrow}{=} \frac{C}{x} + 1 + x^2]$$

Las separatrices se obtienen para $C=0$ con lo que

son $x=0$ y la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$.

[$\mathbf{v}(x, \pm 1) = \begin{pmatrix} \pm 2x \\ 3x \end{pmatrix}$ confirma la deformación de las separatrices].



Pendiente horizontal en la hipérbola $y^2 - 3x^2 = 1$. Vertical en la separatriz $x=0$ y en $y=0$.

[Simetría respecto a ambos ejes: H depende de y^2 y cambiando x por $-x$ sale la órbita $H=-C$].

Hallemos alguna solución. Para los sistemas exactos el primer paso hacia la solución general (tener las órbitas) siempre se puede dar (salvo primitivas no calculables). En este caso se puede también despejar alguna de las variables, pero de ahí no pasamos:

$$y = \pm \sqrt{\frac{C}{x} + 1 + x^2} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm 2x \sqrt{\frac{C}{x} + 1 + x^2}, \text{ no integrable.}$$

Como en otras muchas ocasiones, se puede intentar hallar alguna solución asociada a órbitas sencillas. Por ejemplo busquemos la que cumple $x(0)=3/4, y(0)=5/4$:

$$\text{Por } \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) \text{ pasa la órbita de } C = \frac{3}{4} \left(\frac{25}{16} - \frac{9}{16} - 1\right) = 0 \rightarrow y^2 - x^2 = 1 \rightarrow$$

$$x' = 2x \sqrt{1+x^2}, x(0) = \frac{3}{4}, \text{ o mejor } y' = 2y^2 - 2, y(0) = \frac{5}{4} \rightarrow 2t = \int_{5/4}^y \frac{ds}{s^2 - 1}.$$

Hallado la primitiva y despejando obtendríamos la $y(t)$ [y de ella y la órbita, la $x(t)$].

Pero no olvidemos que hay propiedades de las autónomas de primer orden que se ven sin necesidad de integrar: $y(t) \rightarrow 1$ si $t \rightarrow -\infty$, $y(t)$ explota para un $t_1 > 0$...

Caso particular son las **ecuaciones exactas**:

$$x'' = g(x) \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = g(x) \end{cases} \rightarrow [0] v \frac{dv}{dx} = g(x) \rightarrow$$

Sus órbitas vienen dadas por:

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} - \int g(x) dx = C, \text{ o sea, } \frac{v^2}{2} + V(x) = C, \text{ si } V(x) = -\int g(x) dx$$

(si la ecuación describe el movimiento (sin rozamiento) sobre el eje x de una partícula sometida a una fuerza que sólo depende de su posición, H es la energía total, $v^2/2$ es la cinética y $V(x)$ es la potencial).

A la vista de la solución está claro que las órbitas son simétricas respecto al eje x y que la órbita u órbitas asociadas a cada valor de C son curvas definidas en los intervalos del eje x para los que $V(x) \leq C$ y que cortan dicho eje en los x tales que $V(x) = C$. Con esto y el teorema siguiente **podremos dibujar el mapa de fases conociendo simplemente la gráfica de la función potencial $V(x)$** .

Teor 2. Si V tiene un mínimo en x_0 entonces $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un centro del mapa de fases. Si V tiene un máximo, \mathbf{x}_0 es un punto silla.

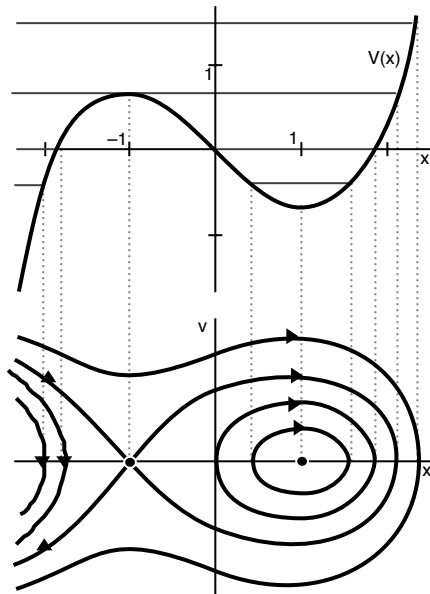
Si V tiene un extremo en x_0 es $V'(x_0) = -g(x_0) = 0$ y \mathbf{x}_0 es punto crítico.

La ecuación de autovalores en \mathbf{x}_0 es $\lambda^2 + V''(x_0) = 0$ y así se trata de un centro si $V''(x_0) > 0$ (mínimo de V) o de un punto silla si $V''(x_0) < 0$ (máximo de V).

[El teorema es válido también aunque \mathbf{x}_0 sea no elemental ($V''(x_0) = 0$)].

Ej 4. $x'' = 1 - x^2 \rightarrow V(x) = -x + \frac{1}{3}x^3$.

Usando sólo la gráfica de $V(x)$ del dibujo superior deducimos el mapa de fases del inferior: como V posee un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$ el mapa de fases tiene el punto silla y el centro dibujados abajo. Trazamos ahora diferentes rectas $V = C$ y las órbitas asociadas: $v^2/2 + V(x) = C$. Para $C = 0$, $V(x) \leq 0$ si $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ (y la órbita, que es una curva simétrica definida en ese intervalo y que corta $v = 0$ en sus extremos, se trata de una curva cerrada rodeando al mínimo) o si $x \leq -\sqrt{3}$ (la órbita sólo corta $v = 0$ en $x = -\sqrt{3}$ y por tanto es abierta). Similares son las dos órbitas dibujadas para un $C < 0$. La $V = C$ que pasa por el máximo de V nos da una curva del mapa de fases que corta $v = 0$ en dos puntos uno de los cuales es el punto silla (nos proporciona, pues, cuatro órbitas: el punto, la órbita que sale y entra en él y las separatrices de la izquierda). Para un C mayor se tiene la otra órbita.



La orientación es la de toda ecuación (hacia la derecha arriba, hacia la izquierda abajo).

Podríamos precisar el dibujo usando las técnicas generales de las secciones anteriores (vectores propios del punto silla, puntos de pendiente horizontal (serán siempre las rectas verticales que contienen a los puntos críticos, pues se obtienen de $g(x) = 0$), ...), pero las principales características de las órbitas ya se ven en el dibujo anterior.

Como para una ecuación exacta tenemos unas órbitas bastante sencillas, parece que se podría conseguir hallar su solución general:

$$v = \pm \sqrt{2} \sqrt{C - V(x)} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2} \sqrt{C - V(x)}} = t + K,$$

pero es muy raro que esta primitiva se pueda hallar. Por ejemplo, en este caso aparece la 'integral elíptica' no calculable $\pm \int [2x - \frac{2}{3}x^3 + 2C]^{-1/2} dx = t + K$.

Ej 5. Dibujemos las órbitas de $x'' = x^3 - 7x^2 + 10x$ y precisemos cuáles de sus soluciones son periódicas.

El mapa de fases se deduce de la función potencial:

$$g(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2, x = 5.$$

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 5x^2.$$

$$V(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{10}{3}, x = 6.$$

$$V(0) = 0, V(2) = -\frac{16}{3}, V(5) = \frac{125}{12}.$$

Las soluciones periódicas no triviales corresponden a órbitas cerradas del mapa de fases (asociadas a segmentos entre las paredes del potencial). En nuestro mapa se ve que lo son todas las órbitas que están dentro de la separatriz que entra y sale del origen.

Preocupémonos en concreto para qué valores a es periódica la solución con $x(0) = a, x'(0) = 0$ (dónde hay que dejar en reposo la partícula para que oscile).

Se ve que esto ocurre si $a \in (0, \frac{10}{3})$.

[Además, si $a = 0, a = 2, a = 5$, la solución es periódica trivialmente, pues es constante, pero si atinamos a dejar la partícula en los inestables $x = 0$ ó $x = 5$, un pequeño soplo nos va a convertir el movimiento en uno no periódico].

Intentemos calcular el periodo T de una solución, por ejemplo, si $a = 3$. Su órbita es:

$$C = -\frac{81}{4} + 63 - 45 = -\frac{9}{4} \rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2 - \frac{9}{4}, v = \pm \frac{\sqrt{3x^4 - 28x^3 + 60x^2 - 27}}{\sqrt{6}} = \frac{dx}{dt}$$

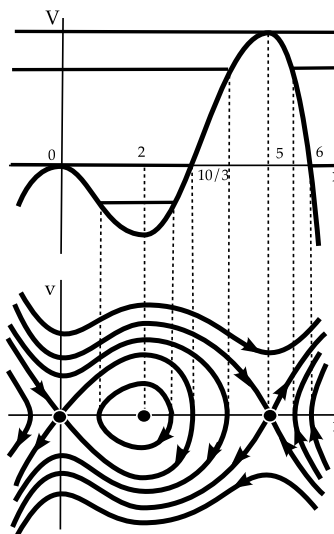
Además de en 3 la órbita cerrada corta $v = 0$ en otro punto que exige ordenar:

$$3x^4 - 28x^3 + 60x^2 - 27 = (x - 3)(3x^3 - 19x^2 + 3x + 9) = 0 \rightarrow x = 3, x_1 \approx 0.835 \left(\begin{array}{l} x_2 < 0 \\ x_3 > 6 \end{array} \right).$$

Por simetría el periodo será el doble de lo que tarda en ir de x_1 a 3:

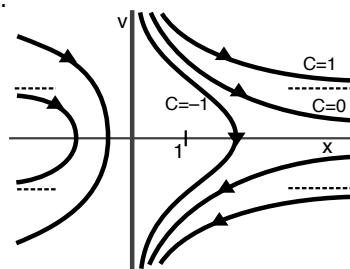
$$T = 2\sqrt{6} \int_{x_1}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x^4 - 28x^3 + 60x^2 - 27}} \approx 2.85 \text{ (de nuevo usando el ordenador).}$$

[A diferencia de los sistemas lineales, el periodo de cada solución es distinto. Se puede probar que el T de las oscilaciones de pequeña amplitud ($a \sim 3$) se parece al de la aproximación lineal, y que $T \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$ (ó $10/3$)].



Ej 6. $x' = -x^{-2}$ Sus órbitas son $x = \frac{2}{\sqrt{2-C}} \rightarrow v = \pm \sqrt{C + \frac{2}{x}}$.

Sin puntos críticos. Puede describir, para $x > 0$, el movimiento bajo un campo gravitatorio en unidades adecuadas. La interpretación física del mapa es sencilla: Si $x(0) = 2$ (por ejemplo), $x'(0) = v_0$ y $v_0 < 1$, la partícula cae al origen; $v_0 = 1$ es la llamada velocidad de escape: para velocidades iniciales mayores que ella la partícula se aleja del origen indefinidamente (a una velocidad que tiende a cte).



Determinemos el tiempo T que tardaría una partícula, inicialmente en reposo en $x = 2$, en llegar hasta el origen. Su órbita [$v(x=2) = 0$] es la de $C = -1$. Así pues:

$$T = \int_0^T dt = -\int_2^0 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{2-x}} = \left[\sqrt{x} \sqrt{2-x} + 2 \arctan \sqrt{\frac{2}{x} - 1} \right]_2^0 = \pi.$$

4.4 ¿Centro o foco?

Vimos en la sección 4.2 que el único caso en que no basta el estudio de la aproximación lineal para clasificar un punto crítico elemental \mathbf{x}_0 de un sistema no lineal

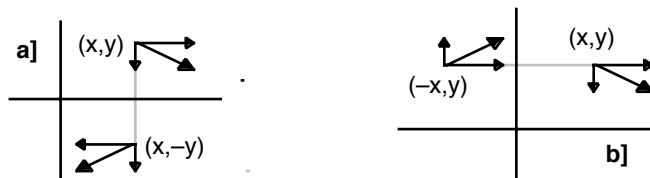
$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

es el caso en que el lineal posea un centro, ya que entonces el punto de [S] puede también ser un centro o bien ser un foco estable o inestable. Tratamos en la sección anterior una situación en la que el centro del lineal se conservaba: si [S] era **exacto**. En esta sección veremos otras técnicas para atacar el problema: el estudio de las posibles simetrías y la utilización de las coordenadas polares.

Desde luego se conservará un centro si las órbitas de [S] poseen **simetría** respecto a alguna recta que pase por \mathbf{x}_0 (las órbitas en torno a un centro pueden ser asimétricas y hay puntos críticos con simetría especular (los focos, claramente no la tienen) que no son centros, pero si un punto con esta simetría es o centro o foco, necesariamente será centro). El análisis de las simetrías se podrá hacer a la vista de las propias órbitas, en el caso excepcional de que la ecuación diferencial de las órbitas sea resoluble, o a partir del propio campo \mathbf{v} . Un ejemplo de esto último lo da el siguiente teorema:

Teor 1.

Si \mathbf{x}_0 es punto crítico de [S], la aproximación lineal posee un centro y o bien **a]** \mathbf{x}_0 está sobre el eje x , $f(x, -y) = -f(x, y)$, $g(x, -y) = g(x, y)$, o bien **b]** \mathbf{x}_0 está sobre el eje y , $f(x, -y) = f(x, y)$, $g(x, -y) = -g(x, y)$, entonces \mathbf{x}_0 es un centro del sistema no lineal [S].



Las hipótesis sobre f y g aseguran en el caso **a]** que las órbitas son simétricas respecto a $y=0$ y en el **b]** que lo son respecto a $x=0$ (y que se recorren en sentidos opuestos a cada lado del eje, como debe ocurrir en un centro). De ello se deduce el resultado.

Observemos que en el caso particular de las ecuaciones las condiciones sobre f se satisfacen automáticamente, con lo que basta comprobar las condiciones sobre g : debe ser par en y o, si \mathbf{x}_0 es el origen, impar en x .

[Conocer las simetrías de un sistema no sólo es útil para distinguir entre centro y foco. Nos da bastante información sobre un mapa de fases, según vimos en algún ejemplo de secciones anteriores (como el 7 de 4.2, el 3 de 4.3 o las ecuaciones exactas)].

Ej 1. $x'' = \text{sen}(x + [x']^2)$, es decir, $\begin{cases} x' = v \\ v' = \text{sen}(x + v^2) \end{cases}$.

Clasifiquemos sus puntos críticos. Estos resultan ser

$$\begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con aproximación lineal } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x+v^2) & 2v\cos(x+v^2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si k es par son puntos silla (del lineal y no lineal como siempre) y si k es impar son centros de la aproximación lineal. Como g es par en v , estos centros lo son también del sistema no lineal (y las órbitas son simétricas respecto al eje x).

Ej 2. $x'' = x - x^3 - x(x')^2 \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = x - x^3 - xv^2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ silla ($\lambda = \pm 1$), $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ centros del lineal.

Los centros se conservan, pues también se cumple el apartado **a)** del teorema 1. Pero aquí no era necesario, pues podemos hallar sus órbitas explícitamente:

$$\frac{dv}{dx} = -xv + \frac{x-x^3}{v} \text{ (Bernouilli)} \rightarrow v^2 = Ce^{-x^2} + 2 - x^2$$

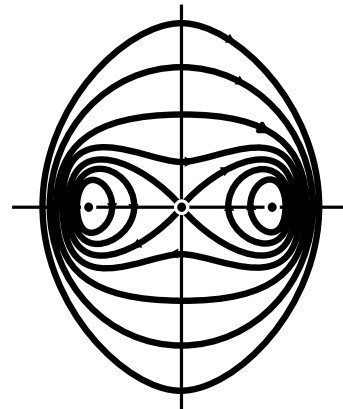
y comprobar su simetría respecto de ambos ejes.

Con las órbitas podemos hacer un preciso mapa de fases. La separatriz ($C = -2$) corta $y=0$, además de en $x=0$, en los x tales que:

$$2e^{-x^2} = 2 - x^2 \quad (x \approx \pm 1.26 \text{ con ordenador})$$

y para $C > -2$ todas las órbitas son cerradas (si $C = 0$ circular). El campo es horizontal sobre $x^2 + v^2 = 1$ y sobre $x=0$ (y vertical como en toda ecuación sobre $y=0$).

Así se genera el dibujo de la portada de los apuntes.



Ej 3. $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1) \end{cases}$ [Este sistema es, para unos parámetros muy concretos, el de Lotka-Volterra que rige la evolución de la población de dos especies animales en relación predador-presa].

Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ punto silla y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ centro de la aproximación lineal.

¿Seguirá el centro siendo un centro del sistema no lineal? Podríamos trasladarlo al origen haciendo $u=x-1$, $v=y-1$ e intentar aplicar el teorema 1, pero el sistema en uv que resulta no satisface ninguna de las dos parejas de condiciones. Sin embargo, podemos calcular las órbitas (ecuación separable) y obtener:

$$\ln y - y + \ln x - x = C.$$

Como esta expresión no varía al cambiar los papeles de x e y , las órbitas son simétricas respecto a la recta $y=x$, con lo que el centro se mantiene en el no lineal.

[En el teorema 1 nos hemos limitado a localizar las posibles simetrías respecto a los ejes, pero se podrían dar condiciones sobre v que asegurasen la simetría respecto a $y=x$ u otras rectas].

En algunas ocasiones podremos precisar que el centro se transforma en un foco estable o inestable analizando el sistema escrito en **coordenadas polares** (aunque en la mayoría de los casos aparezca un sistema más complicado que el inicial).

Derivando las relaciones $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ se obtiene

$$\begin{cases} r' \cos \theta - \theta' r \sin \theta = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ r' \sin \theta + \theta' r \cos \theta = g(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} r' = \cos \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \theta' = \frac{1}{r} [\cos \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta)] \end{cases}$$

En vez de seguir con resultados generales pasamos a analizar ejemplos concretos:

Ej 4. Precisemos la estabilidad de las soluciones constantes de $\begin{cases} x' = x^3 - y \\ y' = x + y^3 \end{cases}$.

$y = x^3 \rightarrow x(1+x^8) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$. El único punto crítico es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hay, pues, un centro en la aproximación lineal, y todavía no conocemos su estabilidad. Como no es exacto ni presenta simetrías (a pesar de ello, aún podría ser un centro) pasamos a polares y obtenemos:

$$\begin{cases} r' = r^3(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \theta' = 1 + \sin \theta \cos \theta(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \end{cases} \cdot \text{ Como } \cos^4 \theta + \sin^4 \theta > 0 \quad \forall \theta,$$

r crece con el tiempo y, por tanto, el origen (la solución trivial) es (foco) **inestable**.

Ej 5. $\begin{cases} x' = ax - 2y + x^3 \\ y' = 2x + ay + 2x^2y + y^3 \end{cases}$ Clasifiquemos el origen para todo valor de a .

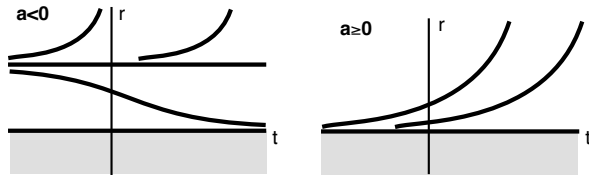
La matriz de la aproximación lineal $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ tiene por autovalores $\lambda = a \pm 2i$, con lo que:

si $a < 0$ es foco estable, si $a > 0$ es foco inestable y si $a = 0$ es centro del lineal.

Como no es exacto ni simétrico hacemos el trabajo de pasar a polares, obteniendo:

$$\begin{cases} r' = ar + r^3 \\ \theta' = 2 + r^2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

Por suerte hemos obtenido una sencilla ecuación independiente de θ para la r fácil de dibujar. Como crece la distancia al origen con t podemos asegurar para $a = 0$ que el origen, que no sabíamos si era centro o foco, es un foco inestable.

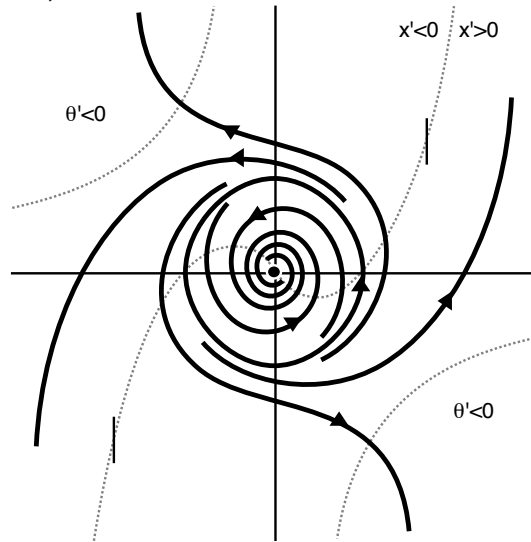


Utilicemos la expresión en polares para dibujar el mapa de fases para un valor de a concreto: $a = -1$. La ecuación autónoma $r' = -r + r^3$ tiene entonces la única solución de equilibrio $r = 1$ en $r > 0$ (además tiene la $r = 0$ que nos da otra vez el punto crítico y la $r = -1$ carece de sentido en coordenadas polares).

Para $r = 1$ se tiene $\theta' = 2 + \sin 2\theta/2 > 0$. Hay por tanto una órbita (la circunferencia unidad) tal que $r = 1$ para todo t y tal que su θ crece con el tiempo [a una órbita cerrada aislada como esta se le llama **ciclo límite**]. Como se ve en la ecuación autónoma todas las demás órbitas tienden hacia ella cuando $t \rightarrow \infty$.

Podemos también asegurar que no hay más puntos críticos que el origen (es difícil verlo con la expresión cartesiana) pues no tiene otras soluciones $r' = \theta' = 0$ (para una solución constante tanto la r como la θ deben permanecer constantes).

Dibujando además la curva de puntos con $x' = 0$ y $\theta' = 0$ ($y = (x^3 - x)/2$ y $xy = -2$, respectivamente) se puede ya dar el mapa de fases.



Es fácil precisar qué soluciones del sistema están definidas para todo t : las periódicas asociadas al ciclo límite y las asociadas a las órbitas contenidas en su interior, por estar acotadas; llegan a infinito en tiempo finito aquellas cuya proyección cae fuera del ciclo límite, pues lo hace su distancia al origen, como se deduce de la ecuación para r' .