

3. Soluciones por medio de series

En el capítulo anterior vimos las escasas formas de resolver elementalmente la ecuación con coeficientes variables $[e] x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. Este capítulo trata una forma general de atacarla: suponer la solución desarrollada en serie de potencias e introducir esta serie en la ecuación para determinar sus coeficientes.

En la sección 3.1 recordaremos la definición de función **analítica** (función descrita por una serie de potencias convergente) y algunas manipulaciones matemáticas que se pueden hacer con ellas.

Cuando a y b son analíticas en un entorno de t_0 (punto **regular**, sección 3.2) siempre se podrán encontrar dos soluciones linealmente independientes de $[e]$ en forma de serie de potencias por el siguiente camino: llevando una serie a la ecuación conseguiremos expresar sus coeficientes c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1 , que serán las dos constantes arbitrarias que aparecen en la solución de cualquier ecuación de segundo orden (algunas veces podremos dar la expresión general del c_k , pero otras nos deberemos limitar a ir calculando coeficiente a coeficiente). Un teorema, que aceptaremos sin demostración, nos asegurará que las series solución son convergentes al menos en el intervalo en que a y b lo eran. Imponer datos iniciales en t_0 será inmediato, pues tendremos que $x(t_0) = c_0$ y $x'(t_0) = c_1$.

Si a y b no son analíticas, pero 'poco' (si t_0 es **singular regular**), también se pueden utilizar series para resolver $[e]$ de una forma sólo algo más complicada (es el método de Frobenius de la sección 3.3). Calcularemos primero una solución x_1 que (si $t_0 = 0$) será siempre de la forma $t^r \sum$ (siendo r una de las raíces del llamado polinomio indicial) y a continuación otra x_2 , linealmente independiente de la anterior, que unas veces será del mismo tipo y otras contendrá además un término incluyendo el $\ln t$. De nuevo un teorema no demostrado garantizará la convergencia de las series que vayan apareciendo.

El cálculo de los coeficientes de las series es sencillo (aunque algo pesado). El problema básico de utilizar series para resolver ecuaciones es la dificultad de obtener información sobre las soluciones que se encuentran (y más cuando no podamos hallar su término general). Sin embargo ecuaciones del tipo $[e]$ surgen a menudo en problemas reales y las series son el único instrumento para resolverlas. Por eso existen libros enteros (los de funciones especiales de la física) dedicados a estudiar las propiedades de las series solución de algunas de estas ecuaciones (las de Legendre, Hermite, Bessel, Laguerre, Tchebycheff, ...). Una muestra de tales estudios son las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de **Legendre**, **Hermite** y **Bessel** que se tratan en la sección 3.4.

Las soluciones por serie en torno a cualquier punto (salvo que puedan ser identificables con una función elemental) no dan ninguna información sobre el comportamiento de las soluciones cuando $t \rightarrow \infty$. En la sección 3.5, para estudiar para grandes valores de t las soluciones, introduciremos el llamado **punto del infinito** de una ecuación, punto $s=0$ de la ecuación que se obtiene haciendo $t=1/s$ en la inicial.

3.1 Funciones analíticas

Una $f(t)$ es **analítica** en $t=t_0$ si viene descrita por una **serie de potencias** en un entorno del punto:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_0)^k = c_0 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + \dots$$

A partir de ahora supondremos que $t_0=0$ (si no, haríamos $t-t_0=s$ y estaríamos en ese caso): $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$.

Como se sabe, a cada serie de potencias está asociado un **radio de convergencia** R tal que:

- si $R=0$, la serie sólo converge en $t=0$; si $R=\infty$, converge para todo t ;
 - si $0 < R < \infty$, converge si $|t| < R$ y diverge si $|t| > R$ (en $t=\pm R$ puede converger o divergir).
- Además, si $0 < t_0 < R$, la serie converge uniformemente en $[-t_0, t_0]$.

El R se puede calcular en muchas ocasiones aplicando el llamado criterio del **cociente**:

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ y sea $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$. Entonces si $\rho < 1$, la \sum converge, y si $\rho > 1$ diverge.

Propiedad básica de las series de potencias es que, si $R > 0$, se pueden derivar e integrar término a término:

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} = c_1 + 2c_2 t + \dots, \quad f''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} = 2c_2 + 6c_3 t + \dots, \dots \quad (\Rightarrow f^{(k)}(0) = k! c_k)$$

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} t^{k+1} = C + c_0 t + \frac{c_1}{2} t^2 + \dots \quad \text{si } |t| < R$$

También pueden sumarse, multiplicarse, ... las series de potencias como si fuesen polinomios:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad \text{si } |t| < R_f \quad \text{y} \quad g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \quad \text{si } |t| < R_g \quad \Rightarrow$$

$$f(t) + g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k + b_k] t^k, \quad f(t)g(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)t^2 + \dots, \quad \text{si } |t| < \min(R_f, R_g)$$

(también el cociente f/g es analítico si tiene límite en $t=0$; ya veremos como hallar su desarrollo).

Caso importante de estas series son las de **Taylor**: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$, para f con infinitas derivadas en 0 .

La mayoría de las funciones elementales coinciden con su serie de Taylor (y por tanto son analíticas) en todo el intervalo de convergencia de esta serie. Por ejemplo, se tiene:

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad \text{sen } t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-1]^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{cos } t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-1]^k t^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{sht } t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{cht } t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad \ln(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[-1]^{k+1} t^k}{k}, \quad \text{arctant } t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-1]^k t^{2k+1}}{2k+1}, \quad [1+t]^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha[\alpha-1]}{2!} t^2 + \dots \quad \text{si } |t| < 1$$

Aunque una f sea $C^\infty(\mathbb{R})$ y su serie de Taylor converja $\forall t$ puede que ambas no coincidan, como le ocurre a $f(t) = e^{-1/t^2}$, $f(0)=0$ que cumple $f^{(k)}(0)=0 \forall k$ (su serie de Taylor es $\sum 0 \cdot t^k = 0$). f , por tanto, no es analítica. Para que una f sea analítica, es necesario que tenga infinitas derivadas en el punto, pero no es suficiente.

Ej 1. Hallemos de varias formas (algunas nada naturales) el desarrollo de $f(t) = \frac{1}{[1+t]^2}$.

$$f(t) = -\frac{d}{dt} \frac{1}{1+t} \rightarrow \frac{1}{[1+t]^2} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) t^k = 1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + \dots \quad \text{si } |t| < 1.$$

Otra forma: $[1+t]^{-2} = 1 - 2t + \frac{-2[-2-1]}{2!} t^2 + \frac{-2[-2-1][-2-2]}{3!} t^3 + \dots = 1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + \dots \quad \text{si } |t| < 1.$

Multiplicando: $f(t) = [1-t+t^2-\dots][1-t+t^2-\dots] = [1 + (-1-1)t + (1+1+1)t^2 + \dots] = 1 - 2t + 3t^2 - \dots \quad \text{si } |t| < 1$

También podemos 'dividir': buscar una serie $\sum c_k t^k$ tal que $[c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots][t^2 + 2t + 1] = 1$; así se va obteniendo: $c_0 = 1$; $2c_0 + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = -2c_0 = -2$; $c_0 + 2c_1 + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -c_0 - 2c_1 = 3$; ...

[el radio R del desarrollo de un cociente P/Q , con P y Q polinomios, simplificados los factores comunes, y $Q(0) \neq 0$ es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de Q más próxima].

Y con un caso sencillo de 'composición' de series: $\frac{1}{1+2t+t^2} = 1 - (2t+t^2) + (2t+t^2)^2 - (2t+t^2)^3 + \dots = \dots$

3.2 Puntos regulares

Sea la ecuación [e] $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$

Se dice que $t=t_0$ es un **punto regular** de [e] si a y b son analíticas en $t=t_0$. En caso contrario se dice que $t=t_0$ es **punto singular** de [e].

Sea $t=0$ regular y llamemos R al menor de los radios de convergencia de a y b . Se podrá, pues, escribir:

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \quad \text{para } |t| < R$$

Si sus coeficientes son analíticos, se puede esperar que cualquier solución de [e] también lo sea, es decir que también se pueda escribir como una serie de potencias para $|t| < R$. Empecemos con un ejemplo:

Ej 1. $(1+t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0$, es decir, $x'' + \frac{2t}{1+t^2}x' - \frac{2}{1+t^2}x = 0$, $a(t)$ y $b(t)$ analíticas en $t=0$ con $R=1$.

Llevemos una solución en forma de serie arbitraria (junto con sus derivadas) a la ecuación inicial (mejor que a la segunda, pues deberíamos desarrollar a y b) y tratemos de calcular sus coeficientes:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad x' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1}, \quad x'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k t^{k-2} + k(k-1)c_k t^k] + \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k t^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k t^k = 0$$

La solución final de esta lineal de segundo orden deberá contener dos constantes arbitrarias así que una buena estrategia puede ser intentar escribir los c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1 . Como para que una serie de potencias se anule han de ser 0 los coeficientes de cada potencia de t , deducimos:

$$t^0: 2 \cdot 1 \cdot c_2 - 2 \cdot c_0 = 0 \rightarrow c_2 = c_0$$

$$t^1: 3 \cdot 2 \cdot c_3 + [2-2]c_1 = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

$$t^{k-2}: k(k-1)c_k + [(k-2)(k-3)+2(k-2)-2]c_{k-2} = 0$$

(hemos escrito aparte los primeros términos porque cada serie empieza a aportar términos para distintos k).

De la última expresión deducimos la **regla de recurrencia** que expresa el c_k en función de los anteriores ya conocidos (en este ejemplo, sólo en función de c_{k-2}); factorizamos, para facilitar los cálculos, los polinomios que aparecen calculando sus raíces:

$$c_k = -\frac{k(k-3)}{k(k-1)} c_{k-2} = -\frac{k-3}{k-1} c_{k-2}, \quad k=2,3,\dots$$

A partir de esta regla escribimos algunos c_k más (siempre en función de c_0 o c_1) con el objetivo de encontrar la expresión del **término general** de la serie (en muchos otros ejemplos esto no será posible):

$$c_4 = -\frac{1}{3} c_2 = -\frac{1}{3} c_0, \quad c_6 = -\frac{3}{5} c_4 = \frac{1}{5} c_0, \dots \rightarrow c_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} c_0, \quad k=1,2,\dots$$

$$c_5 = 0 \text{ por estar en función de } c_3 \text{ que se anulaba. Análogamente } c_7 = c_9 = \dots = 0$$

Agrupando los términos que acompañan a c_0 y c_1 (que quedan indeterminados) obtenemos por fin:

$$x = c_0 \left[1 + t^2 - \frac{1}{3} t^4 + \frac{1}{5} t^6 + \dots \right] + c_1 t = c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k}}{2k-1} \right] + c_1 t = c_0 x_1 + c_1 x_2$$

Esta expresión tiene la estructura clásica de las soluciones de las lineales de segundo orden. Pero para que lo sea de verdad, las series deben converger en un entorno de $t=0$, y además x_1 y x_2 han de ser linealmente independientes. Esto es lo que sucede. La serie de x_1 (como se puede ver por el criterio del cociente) converge para $|t| < 1$ y la 'serie' de x_2 (truncada a partir de su segundo término) converge para todo t . Y el wronskiano de ambas soluciones en $t=0$ resulta ser 1 (pues $x_1(0)=1, x_1'(0)=0, x_2(0)=0, x_2'(0)=1$).

Si, en vez de la solución general, la que queremos es la que cumple $x(0)=x_0, x'(0)=x_0'$ (existe y es única por ser a y b analíticas) dada la forma de las series de x_1 y x_2 es inmediato que debe tomarse $c_0=x_0, c_1=x_0'$.

[Esta ecuación se podía haber resuelto sin usar series. Era fácil darse cuenta de que $x_2 = t$ era una solución, y podríamos haber calculado la x_1 siguiendo la sección 2.2:

$$x_1 = x_2 \int x_2^{-2} e^{-\int a} dt = t \int t^{-2} e^{-\int \frac{2t}{1+t^2}} dt = t \int t^{-2} (1+t^2)^{-1} dt = -1 - t \arctan t,$$

cuyo desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente].

Gran parte de lo visto en este ejemplo ocurre en general, como asegurará el teorema 1 que no demostraremos.

Teor 1.

Si $t=0$ es regular, la solución general de [e] es $x = c_0 x_1 + c_1 x_2 = c_0 [1 + \sum] + c_1 [t + \sum]$, con c_0, c_1 arbitrarios, y las series, que contienen potencias t^k con $k \geq 2$, convergen, al menos, para $|t| < R$. Los coeficientes de estas series se determinan de forma única probando una serie de potencias arbitraria en la ecuación (con las funciones $a(t)$ y $b(t)$ desarrolladas) y expresando sus coeficientes c_k , para $k \geq 2$, en función de c_0 y c_1 . La solución única de [e] con $x(0)=x_0, x'(0)=x_0'$ se obtiene simplemente sustituyendo $c_0=x_0, c_1=x_0'$.

[El desarrollo de a y b , desde luego, no será necesario si esas funciones son polinomios].

Para estudiar las soluciones de [e] en un entorno de otro t_0 regular, el **cambio de variable** $s = t - t_0$ lleva a una ecuación en s para la que $s=0$ es regular. Probaríamos entonces para hallar su solución la serie:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \quad [\text{es decir, } x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_0)^k].$$

Ej 2.

$x'' + (t-2)x = 0, x(0)=2, x'(0)=1$

$t=0$ regular puesto que $a(t)=0$ y $b(t)=t-2$ son analíticas en todo \mathbb{R} .

[El primer ejemplo era demasiado sencillo. En general, y como en este, las cosas serán más complicadas].
Llevando una serie arbitraria y sus derivadas a la ecuación e igualando a 0 los coeficientes de cada t^k :

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} [c_k t^{k+1} - 2c_k t^k] = 0 \rightarrow$$

$$t^0: 2 \cdot 1 \cdot c_2 - 2 \cdot c_0 = 0 \rightarrow c_2 = c_0; \quad t^1: 3 \cdot 2 \cdot c_3 + c_0 - 2 \cdot c_1 = 0 \rightarrow c_3 = -\frac{1}{6}c_0 + \frac{1}{3}c_1; \quad \dots$$

$$t^{k-2}: k(k-1)c_k + c_{k-3} - 2c_{k-2} = 0 \rightarrow c_k = -\frac{1}{k(k-1)}c_{k-3} + \frac{2}{k(k-1)}c_{k-2}, \quad k=3,4,\dots$$

(regla de recurrencia de tres términos que suele traer muchos más problemas que las de dos).

Escribimos un par de términos más en función de c_0 y c_1 :

$$c_4 = -\frac{1}{12}c_1 + \frac{2}{12}c_2 = \frac{1}{6}c_0 - \frac{1}{12}c_1; \quad c_5 = -\frac{1}{20}c_2 + \frac{2}{20}c_3 = -\frac{1}{15}c_0 + \frac{1}{30}c_1$$

No hay forma de encontrar la expresión del término general, aunque paso a paso podemos ir calculando el número de términos que queramos.

La solución general es entonces: $x = c_0 [1 + t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{15}t^5 + \dots] + c_1 [t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{30}t^5 + \dots]$

Y la particular pedida: $x = 2 + t + 2t^2 + \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{10}t^5 + \dots$, serie convergente para todo t según el teorema.

Para calcular unos pocos términos (pero no para calcular muchos o para buscar la expresión del término general) de una serie solución cerca de un punto regular se puede seguir el siguiente camino:

Haciendo $t=0$ en la ecuación: $x''(0) + (0-2)x(0) = 0 \rightarrow x''(0) = 4$

Derivando la ecuación y volviendo a hacer $t=0$: $x'''(0) + (t-2)x'(0) + x(0) = 0 \rightarrow x'''(0) = 2x'(0) - x(0) = 0$

Derivando otra vez: $x''''(0) + (t-2)x''(0) + 2x'(0) = 0 \rightarrow x''''(0) = 2x''(0) - 2x'(0) = 6, \dots$

Por tanto: $x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2}t^2 + \frac{x'''(0)}{6}t^3 + \dots = 2 + t + \frac{4}{2}t^2 + \frac{0}{6}t^3 + \frac{4}{24}t^4 + \dots$

Si buscamos unos términos de la solución con $x(2)=6, x'(2)=0$, la solución general de arriba, dada por series en $t=0$, claramente no sirve para imponer datos en $t=2$. Debemos resolver en torno a este punto:

$$s = t - 2 \rightarrow \frac{d^2x}{ds^2} + sx = 0, s=0 \text{ regular} \rightarrow x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k s^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{k+1} = 0 \rightarrow$$

$$s^0: 2c_2 = 0; \quad s^1: 6c_3 + c_0 = 0, c_3 = -\frac{1}{6}c_0; \quad \dots; \quad s^{k-2}: k(k-1)c_k + c_{k-3} = 0 \rightarrow c_k = -\frac{1}{k(k-1)}c_{k-3}, \quad k=3,4,\dots$$

$$\rightarrow c_5 = c_8 = \dots = 0; \quad c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3}c_1; \quad c_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5}c_3 = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0; \quad c_7 = -\frac{1}{7 \cdot 6}c_4 = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1 \rightarrow$$

$$x = c_0 [1 - \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{120}s^6 + \dots] + c_1 [s - \frac{1}{12}s^4 + \frac{1}{504}s^7 + \dots] \xrightarrow{\text{datos}} x = 6 - s^3 + \frac{1}{20}s^6 + \dots = 6 - (t-2)^3 + \frac{1}{20}(t-2)^6 + \dots$$

(Aquí sí podemos expresar el término general, aunque no nos queda tan compacto como en el ejemplo 1:

$$x = c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (t-1)^{3k}}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3k-1) \cdot 3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3k)} \right] + c_1 \left[t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (t-1)^{3k+1}}{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3k) \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3k+1)} \right].$$

3.3 Puntos singulares regulares

Supondremos en esta sección que $t=t_0$ es un **punto singular** de $[e] x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, es decir, que o $a(t)$ o $b(t)$ o las dos no son analíticas en $t=t_0$, con lo que no es aplicable el método de la sección anterior. Sin embargo, interesa precisamente en muchas ocasiones conocer el comportamiento de las soluciones de $[e]$ en las cercanías de sus puntos singulares. En general se podrá decir poco sobre este comportamiento, salvo para un tipo particular de puntos sólo débilmente singulares: los **singulares regulares** que vamos a definir. Supondremos a partir de ahora que el punto singular que tratamos es $t=0$. Sabemos que esto no supone pérdida de generalidad ya que en el caso de que queramos estudiar las soluciones cerca de un $t_0 \neq 0$ el cambio $s=t-t_0$ nos traslada el problema al estudio de las soluciones cerca de 0 de la ecuación en s .

Conviene escribir $[e]$ de otra forma. Multiplicándola por t^2 y llamando $a^*(t) = ta(t)$ y $b^*(t) = t^2b(t)$ obtenemos:

$$[e^*] \quad t^2 x'' + ta^*(t)x' + b^*(t)x = 0$$

$t=0$ es punto singular regular de $[e]$ - $[e^*]$ si $a^*(t) = ta(t)$ y $b^*(t) = t^2b(t)$ son analíticas en $t=0$.

Ej 1. $t(t-1)^2 x'' - tx' + (t-1)x = 0$, es decir, $x'' - \frac{1}{(t-1)^2} x' + \frac{1}{t(t-1)} x = 0$, ó $t^2 x'' - t \frac{t}{(t-1)^2} x' + \frac{t}{t-1} x = 0$.

$t=0$ y $t=1$ son puntos singulares de la ecuación (todos los demás son regulares).

Como $a^*(t) = -t/(t-1)^2$ y $b^*(t) = t/(t-1)$ son analíticas en $t=0$, este punto es singular regular.

Haciendo $t-1 = s$ obtenemos: $s^2(s+1)x'' - (s+1)x' + sx = 0$, es decir, $s^2 x'' - s \frac{1}{s} x' + \frac{s}{s+1} x = 0$
(las derivadas son ahora con respecto a s , pero las hemos dejado tal cual, pues $ds/dt=1$).

Como $-1/s$ no es analítica en 0 (aunque $s/(s+1)$ sí lo sea), el punto $t=1$ ($s=0$) es singular no regular.

Se trata, por tanto, de resolver $[e^*]$ cerca de $t=0$ suponiendo que $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son analíticas en ese punto, es decir, que admiten desarrollo en serie válido en $|t| < R$ (mínimo de los radios de convergencia):

$$a^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* t^k = a_0^* + a_1^* t + \dots, \quad b^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^* t^k = b_0^* + b_1^* t + \dots$$

Para resolver $[e^*]$ se utiliza el **método de Frobenius**, que detallaremos en el teorema de esta sección. Aunque no lo demostraremos, intentamos con unas consideraciones hacer creíbles sus hipótesis y conclusiones. La ecuación más sencilla del tipo $[e^*]$ es la de Euler ya conocida (en ella $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son 'series' que se reducen a su primer término). Viendo sus soluciones está claro que no existen, en general, soluciones analíticas de $[e^*]$. Pero ya que hay soluciones de Euler de la forma t^r se podría pensar que $[e^*]$ posee soluciones en forma de serie que comiencen por términos t^r .

Probemos por tanto en $[e^*]$ la solución $x = t^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0 t^r + c_1 t^{r+1} + c_2 t^{r+2} + \dots$. Debe ser entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)c_k t^{k+r} \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^* t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+r} \right) = 0$$

El coeficiente que acompaña a la potencia de menor orden (t^r) debe anularse: $[r(r-1) + a_0^* r + b_0^*] c_0 = 0$. Si la serie ha de empezar por términos de exponente r , debe ser $c_0 \neq 0$. Por tanto, los únicos valores de r para los que pueden existir soluciones no triviales de la forma $t^r \sum$ son las raíces del polinomio:

$Q(r) = r(r-1) + a_0^* r + b_0^*$, llamado **polinomio indicial** de $[e^*]$.

Esto es coherente con lo visto sobre ecuaciones de Euler. Para ellas, si $Q(r)$ tenía dos raíces distintas r_1 y r_2 , dos soluciones linealmente independientes de la ecuación eran t^{r_1} y t^{r_2} . Si la raíz era doble, sin embargo, sólo existía una solución de esa forma, y la segunda era la primera multiplicada por el $\ln t$; por tanto, también es de esperar que en la solución general de $[e^*]$ aparezcan logaritmos. Pero al resolver por series la ecuación $[e^*]$ pueden aparecer problemas que no se presentan en el caso particular de las de Euler. Igualando a 0 el coeficiente que acompaña a t^{r+k} tenemos:

$$[(r+k)(r+k-1) + (r+k)a_0^* + b_0^*] c_k + [(r+k-1)a_1^* + b_1^*] c_{k-1} + \dots = 0$$

donde los puntos representan los términos con c_{k-2}, c_{k-3}, \dots . De esta expresión podemos despejar el c_k en función de los anteriores ya calculados siempre que el corchete que le acompaña, que es $Q(r+k)$ (el polinomio indicial evaluado en $r+k$), no se anule. Si r_1 es la mayor de las dos raíces $Q(r_1+k) \neq 0 \forall k$. Pero si r_2 es la menor, y la diferencia $r_1 - r_2$ es un entero positivo n , el $Q(r_2+k) = 0$ si $k=n$, y, salvo que los demás sumandos también se anulen (con lo que c_n quedaría indeterminado), no hay forma de anular el coeficiente de t^{r_2+n} y no pueden existir soluciones $t^{r_2} \sum$.

Enunciamos ya el **teorema de Frobenius** (aunque se podría considerar el caso de raíces complejas del polinomio indicial, nos limitamos, por sencillez, a los casos reales):

Teor 1. Supongamos que el polinomio indicial $Q(r)=r(r-1)+a^*_0r+b^*_0$ tiene raíces reales r_1, r_2 con $r_1 \geq r_2$.
 Entonces siempre existe una solución x_1 de $[e^*]$ de la forma $x_1 = t^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, c_0 \neq 0$.
 La segunda solución x_2 linealmente independiente es, según los casos:
a) Si $r_1 - r_2$ no es cero ni entero positivo: $x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, b_0 \neq 0$.
b) Si $r_1 = r_2$, $x_2 = t^{r_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + x_1 \ln t$.
c) Si $r_1 - r_2 = n$ entero positivo, $x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + d x_1 \ln t, b_0 \neq 0, d \in \mathbf{R}$.
 Todas las soluciones están definidas al menos para $0 < t < R$ y los coeficientes c_k, b_k y la constante d se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

Normalmente será $a^*_0 = a^*(0)$ y $b^*_0 = b^*(0)$ [salvo que aparezcan funciones como $\frac{\text{sent } t}{t}$].
 Se comprueba sin dificultad que a partir de las soluciones anteriores obtenemos otras válidas en $-R < t < 0$ sin más que sustituir $\ln t$ por $\ln |t|$ y las expresiones de la forma t^r que preceden a las series por $|t|^r$.
 En el caso **c)** la constante d puede perfectamente ser 0 (como ocurre en las ecuaciones de Euler), con lo que, a pesar de todo, hay dos soluciones independientes de la forma $t^r \sum$.

Ej 2. $2tx'' + x' + tx = 0$, o sea, $t^2x'' + t \frac{1}{2}x' + \frac{t^2}{2}x = 0$. $a^*(t) = \frac{1}{2}$ y $b^*(t) = \frac{t^2}{2}$ analíticas (con $R = \infty$) \Rightarrow
 $t=0$ singular regular. Como $a^*_0 = \frac{1}{2}$ y $b^*_0 = 0$, el polinomio indicial es $r(r-1) + \frac{1}{2}r + 0 = r(r - \frac{1}{2}) \rightarrow$
 $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = 0$, con $r_1 - r_2$ no entero. Las dos soluciones linealmente independientes son, pues:
 $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1/2}, c_0 \neq 0$ y $x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, b_0 \neq 0$, series convergentes $\forall t \in \mathbf{R}$, según el teorema.

Llevando la primera de ellas a la ecuación inicial (las series se derivan como las de potencias habituales):

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) c_k t^{k-1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} (k + \frac{1}{2}) c_k t^{k-1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+3/2} = 0$$
 (obsérvese que ahora todas las series comienzan por $k=0$ ya que, a diferencia de los puntos regulares, no se anulan los primeros términos al derivar).

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de t :
 $t^{-1/2}$: $[2(1/2)(-1/2) + 1/2] c_0 = 0. c_0 = 0$ y c_0 queda indeterminado como debía.
 $t^{1/2}$: $[2(3/2)(1/2) + 3/2] c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0$.

 $t^{k-1/2}$: $[2(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) + (k + \frac{1}{2})] c_k + c_{k-2} = 0 \rightarrow c_k = -\frac{1}{k(2k+1)} c_{k-2}, k=2,3,\dots$

Por tanto: $c_3 = c_5 = \dots = 0, c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 5} c_0, c_4 = -\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9} c_0, \dots$ y la primera solución es:

$$x_1 = t^{1/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2m \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4m+1)} t^{2m} \right] \text{ (eligiendo, por ejemplo, } c_0=1 \text{)}$$

Para la segunda raíz del polinomio indicial: $\sum_{k=2}^{\infty} 2k(k-1) b_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+1} = 0 \rightarrow$
 t^0 : $b_1 = 0, t^1$: $[4+2] b_2 + b_0 = 0 \rightarrow b_2 = -\frac{1}{6} b_0$

 t^{k-1} : $[2k(k-1)+k] b_k + b_{k-2} = 0 \rightarrow b_k = -\frac{1}{k(2k-1)} b_{k-2}, k=2,3,\dots \rightarrow$
 $b_3 = b_5 = \dots = 0, b_4 = -\frac{1}{4 \cdot 7} b_2 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7} b_0, \dots \rightarrow x_2 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2m \cdot 3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4m-1)} t^{2m}$

El criterio del cociente prueba que, como debían, ambas series convergen $\forall t$. La x_2 es válida $\forall t$, pero x_1 sólo si $t > 0$ (en $t=0$ ni siquiera es derivable). Una x_1 válida $\forall t \neq 0$ es $x_1 = |t|^{1/2} [1 + \sum]$.

Más complicadas son las cuentas para los otros dos casos del teorema:

Ej 3. $t^2x'' + 2t^2x' + (t^2 + \frac{1}{4})x = 0$ $t=0$ singular regular; $a^*(t)=2t$, $b^*(t)=t^2 + \frac{1}{4}$ analíticas en \mathbf{R} .

$$r(r-1) + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow r = \frac{1}{2} \text{ doble} \rightarrow x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1/2} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} [k^2 c_k t^{k+1/2} + (2k+1)c_k t^{k+3/2} + c_k t^{k+5/2}] = 0 \rightarrow$$

$$c_1 = -c_0, c_k = -\frac{2k-1}{k^2} c_{k-1} - \frac{1}{k^2} c_{k-2}, k=2,3,\dots \rightarrow c_2 = \frac{1}{2} c_0, c_3 = -\frac{1}{6} c_0, \dots, c_k = (-1)^k \frac{1}{k!} c_0 \rightarrow x_1 = t^{1/2} e^{-t}$$

Como la raíz es doble, la otra solución necesariamente contiene un logaritmo: $x_2 = t^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + x_1 \ln t \rightarrow$

$$x_2' = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \frac{3}{2}) b_k t^{k+1/2} + \frac{1}{t} x_1 + x_1' \ln t, x_2'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \frac{3}{2})(k + \frac{1}{2}) b_k t^{k-1/2} - \frac{1}{t^2} x_1 + \frac{2}{t} x_1' + x_1'' \ln t \rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k^2 + 2k + 1) b_k t^{k+3/2} + (2k+3) b_k t^{k+5/2} + b_k t^{k+7/2}] + \ln t [t^2 x_1'' + 2t^2 x_1' + (t^2 + \frac{1}{4}) x_1] = 0$$

El último corchete es 0 por ser x_1 solución (lo que acompaña al logaritmo siempre se anula).

$$\rightarrow b_0 = b_1 = b_2 = \dots = 0 \rightarrow x_2 = t^{1/2} e^{-t} \ln t$$

[Para comprobar el resultado podríamos hacer $y = e^t x \rightarrow t^2 y'' + \frac{1}{4} y = 0$ (Euler) $\rightarrow y = c_1 t^{1/2} + c_2 t^{1/2} \ln t$;

también podríamos, una vez hallada la x_1 , haber calculado otra solución utilizando la fórmula de 2.2:

$$x_2 = t^{1/2} e^{-t} \int \frac{e^{-2t}}{t e^{-2t}} dt = t^{1/2} e^{-t} \ln t, \text{ exactamente la misma solución hallada con las series].}$$

Ej 4. $t^2x'' + 2t^2x' - 2x = 0$ $t=0$ es singular regular, $a^*(t)=2t$ y $b^*(t)=-2$ analíticas en \mathbf{R} .

El polinomio indicial $r(r-1) + 0 \cdot r - 2$ tiene por raíces $r_1=2$ y $r_2=-1$. Así pues:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+2}, c_0 \neq 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_k t^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2) c_k t^{k+3} - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k t^{k+2} = 0$$

$$\rightarrow c_0 \text{ indeterminado, } c_k = -\frac{2(k+1)}{k(k+3)} c_{k-1}, k=1,2,\dots \rightarrow$$

$$c_1 = -c_0, c_2 = \frac{3}{5} c_0, c_3 = -\frac{4}{15} c_0, \dots, c_k = (-1)^k \frac{2(k+1)}{k(k+3)} \frac{2k}{(k-1)(k+2)} \frac{2(k-1)}{(k-2)(k+1)} \dots c_0 = \frac{(-2)^k (k+1)}{(k+3)!} 6c_0$$

$$\text{Por tanto, eligiendo } c_0 = \frac{1}{6}, x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k (k+1)}{(k+3)!} t^{k+2} \rightarrow x_1' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k (k+1)(k+2)}{(k+3)!} t^{k+1}$$

La segunda solución (caso c) del teorema es $x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1} + d x_1 \ln t$, $b_0 \neq 0$, d constante (quizás nula) \rightarrow

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k-1)(k-2) b_k t^{k-1} + 2(k-1) b_k t^k - 2b_k t^{k-1}] + d [(-1+2t)x_1 + 2tx_1'] + d \ln t [t^2 x_1'' + 2t^2 x_1' - 2x_1] = 0$$

Como siempre, el tercer corchete se anula, por ser x_1 solución. Sustituyendo las series de x_1 y x_1' escritas arriba en el segundo corchete y agrupando potencias de t :

$$-2b_0 - 2b_1 - 2b_2 t + [2b_3 + 2b_2 - 2b_3 - \frac{d}{6} + \frac{2d}{3}] t^2 + \dots = 0 \rightarrow b_1 = -b_0, b_2 = 0, d = 0; b_0, b_3 \text{ indeterminados.}$$

Como $d=0$, en la expresión de x_2 no aparece el $\ln t$. Sabíamos que debía ser $b_0 \neq 0$. El hecho de que también b_3 quede indeterminado se debe a que proporciona potencias t^2 , comienzo de la serie de x_1 . Elegimos $b_0=1$ y $b_3=0$ (para no recalcular x_1). Como en la regla de recurrencia cada b_k depende de b_{k-1} es $b_4=b_5=\dots=0$.

$$\text{Concluimos que: } x_2 = \frac{1}{t} (1-t) \text{ [es fácil comprobar que satisface la ecuación].}$$

[De esta x_2 obtendríamos otra con: $x_1 = \frac{1-t}{t} \int \frac{t^2 e^{-2t}}{(1-t)^2} dt$, pero ahora la primitiva no es calculable, aunque podríamos desarrollar el integrando e integrar el resultado para obtener una serie solución].

[En este ejemplo, si, en vez de partir de la raíz mayor de la ecuación indicial, hubiésemos sustituido la x_2 , habríamos obtenido las dos series de un tirón; pero esto ocurriría por que casualmente resulta ser $d=0$; si fuera $d \neq 0$ sólo obtendríamos la solución trivial $x=0$ y deberíamos empezar de nuevo desde el principio].

Para distinguir en el caso c) del teorema de Frobenius si aparecen logaritmos o no (es decir, si es o no $d \neq 0$) no es necesario hallar la expresión del término general, bastan con los primeros términos de la x_1 . Por ejemplo:

Ej 5. Estudiemos cuántas soluciones analíticas linealmente independientes tiene: $2tx'' + (t-2)x' + 3x = 0$.

$$t^2x'' + t\left(\frac{t}{2} - 1\right)x' + \frac{3t}{2}x = 0 \rightarrow t=0 \text{ es singular regular con } r(r-1) - r + 0 = 0 \rightarrow r_1=2, r_2=0.$$

$$\text{Seguro que es analítica } x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+2} \rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [2(k+2)(k+1)c_k t^{k+1} - 2(k+2)c_k t^{k+1} + (k+2)c_k t^{k+2} + 3c_k t^{k+2}] = \sum_{k=0}^{\infty} [2(k+2)kc_k t^{k+1} + (k+5)c_k t^{k+2}] = 0.$$

Calculemos, por ejemplo, los tres primeros términos de esta primera serie:

$$t^1: 0c_0=0, c_0 \text{ indeterminado}; \quad t^2: 6c_1+5c_0=0, c_1=-\frac{5}{6}c_0; \quad t^3: 16c_2+6c_1=0, c_2=-\frac{3}{8}c_1 = \frac{5}{16}c_0$$

$$\rightarrow x_1 = t^2 - \frac{5}{6}t^3 + \frac{5}{16}t^4 + \dots \quad [\rightarrow x_1' = 2t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{5}{4}t^3 + \dots]$$

La segunda solución $x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + d x_1 \ln t$ será analítica si $d=0$ y no lo será si $d \neq 0$. Hay que trabajar:

$$x_2' = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1} + d x_1' \ln t + \frac{d}{t} x_1; \quad x_2'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k t^{k-2} + d x_1'' \ln t + \frac{2d}{t} x_1' - \frac{d}{t^2} x_1 \rightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} [k b_k t^k - 2k b_k t^{k-1}] + \sum_{k=0}^{\infty} 3b_k t^k + 4d x_1' - \frac{4d}{t} x_1 + d x_1 = 0 \rightarrow$$

$$t^0: -2b_1+3b_0=0 \rightarrow b_1=\frac{3}{2}b_0; \quad t^1: 4b_2+b_1-4b_2+3b_1+8d-4d=0 \rightarrow d=-b_1=-\frac{3}{2}b_0 \neq 0$$

Por tanto, la segunda solución contiene el $\ln t$ y no es analítica en $t=0$: $x_2 = 1 + \frac{3}{2}t + \dots - \frac{3}{2}x_1 \ln t$.

Ej 6. $t x'' + 2e^t x' = 0$ Sabemos resolver la ecuación siguiendo la sección 2.2, pero utilicemos Frobenius:

$t=0$ es singular regular [$a^*(t)=2e^t$ y $b^*(t)=0$ analíticas en todo \mathbf{R}]. $r(r-1)+2r=0 \rightarrow r_1=0, r_2=-1$.

La $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ se ve (¡a ojo!) que es $x_1 \equiv 1$. La otra es: $x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1} + d \ln t \rightarrow$

$$x_2' = \sum_{k=0}^{\infty} (k-1) b_k t^{k-2} + \frac{d}{t}, \quad x_2'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)(k-2) b_k t^{k-3} - \frac{d}{t^2} \rightarrow$$

$$2b_0 t^{-2} + 2b_3 t + \dots - d t^{-1} + [2+2t+t^2+\frac{1}{3}t^3+\dots][d t^{-1} - b_0 t^{-2} + b_2 + 2b_3 t + \dots] = 0 \rightarrow$$

$$t^{-2}: 2b_0 - 2b_0 = 0 \rightarrow b_0 \text{ indeterminado como debía.}$$

$$t^{-1}: -d + 2d - 2b_0 = 0 \rightarrow d = 2b_0 \text{ (aparecen, pues, logaritmos).}$$

$$t^0: 2d - b_0 + 2b_2 = 0 \rightarrow b_2 = \frac{1}{2}b_0 - d = -\frac{3}{2}b_0$$

$$t^1: 2b_3 + d - \frac{1}{3}b_0 + 2b_2 + 4b_3 = 0 \rightarrow b_3 = \frac{2}{9}b_0$$

$$\dots \rightarrow x_2 = 2 \ln t + \frac{1}{t} - \frac{3}{2}t + \frac{2}{9}t^2 + \dots$$

Resolvamos la ecuación ahora sin series: $x' = v \rightarrow v' = -\frac{2e^t}{t} v \rightarrow$

$$v = C e^{-\int 2t^{-1} e^t dt} = C e^{\int (-2/t - 2 - t - t^2/3 + \dots) dt} = C t^{-2} e^{-2t - t^2/2 - t^3/9 + \dots} =$$

$$= C t^{-2} [1 + (-2t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{9}t^3 + \dots) + \frac{1}{2}(-2t - \frac{1}{2}t^2 - \dots)^2 + \frac{1}{6}(-2t - \dots)^3 + \dots] \rightarrow$$

$$x = K + C \int [t^{-2} - 2t^{-1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{9}t + \dots] dt = K - C [2 \ln t + \frac{1}{t} - \frac{3}{2}t + \frac{2}{9}t^2 + \dots]$$

3.4 Ecuaciones de Legendre, Hermite y Bessel

La ecuación de **Legendre** es la ecuación [L] $(1-t^2)x'' - 2tx' + p(p+1)x = 0$, $p \geq 0$.

Resolvámosla primero en torno a $t=0$ que es punto regular. Como $a(t)=-2t/(1-t^2)$ y $b(t)=p(p+1)/(1-t^2)$ son analíticas en $|t|<1$ la ecuación tiene soluciones analíticas al menos en ese intervalo. Probamos pues:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k t^{k-2} - k(k-1)c_k t^k] - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} p(p+1)c_k t^k = 0 \rightarrow c_k = -\frac{(p-k+2)(p+k-1)}{k(k-1)} c_{k-2}, k=2,3,\dots$$

$$\rightarrow c_2 = -\frac{p(p+1)}{2 \cdot 1} c_0, c_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3 \cdot 2} c_1, c_4 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} c_0, c_5 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} c_1, \dots \rightarrow$$

$$x_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-2)\dots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\dots(p+2n-1)}{(2n)!} t^{2n}$$

$$x_2 = t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\dots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\dots(p+2n)}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

Si p es un entero par positivo, $p=2m$, x_1 se convierte en un polinomio de grado $2m$:

$$p=0 \rightarrow x_1 = 1, \quad p=2 \rightarrow x_1 = 1-3t^2, \quad p=4 \rightarrow x_1 = 1-10t^2 + \frac{35}{3}t^4, \dots$$

Si p es impar, $p=2m+1$, es x_2 quien se reduce a un polinomio de grado $2m+1$:

$$p=1 \rightarrow x_2 = t, \quad p=3 \rightarrow x_2 = t - \frac{5}{3}t^3, \quad p=5 \rightarrow x_2 = t - \frac{14}{3}t^3 + \frac{21}{5}t^5, \dots$$

Se llama **polinomio de Legendre de grado n** al polinomio P_n solución de [L] con $p=n \in \mathbf{N}$, $P_n(1)=1$:

$$P_0=1, P_1=t, P_2=\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, P_3=\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, P_4=\frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}, P_5=\frac{63}{8}t^5 - \frac{35}{4}t^3 + \frac{15}{8}t, \dots$$

Como $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$, los P_{2m} tienen simetría par y los P_{2m+1} impar. Observemos que los P_{2m+1} y las derivadas de los P_{2m} se anulan en 0. Se pueden probar además las siguientes propiedades de los P_n :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n, \text{ fórmula de } \mathbf{Rodrigues}.$$

P_n tiene n ceros reales, todos en $(-1,1)$. Los P_n son **ortogonales**:

$$\int_{-1}^1 P_n P_m dt = 0, \text{ si } m \neq n; \quad \int_{-1}^1 P_n^2 dt = \frac{2}{2n+1}$$

Para las aplicaciones de la ecuación [L] a las EDPs se necesitará saber qué soluciones están acotadas en ± 1 . Para estudiarlo resolvemos la ecuación en torno a $t=1$, haciendo $s=t-1$:

$$[L_1] \quad s(s+2)x'' + 2(s+1)x' - p(p+1)x = 0$$

Para ella $s=0$ es punto singular regular, con $a^*(s)=2(s+1)/(s+2)$, $b^*(s)=-p(p+1)s/(s+2)$ analíticas para $|s|<2$. El polinomio indicial tiene raíz $r=0$ doble $\forall p$. Dos soluciones linealmente independientes de $[L_1]$ son:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \quad \text{y} \quad x_2 = |s| \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k + x_1 \ln|s|, \quad c_0=1$$

y las series convergen al menos para $|s|<2$. Sin necesidad de calcular ningún coeficiente podemos ya afirmar que la x_1 siempre está acotada en $s=0$ ($t=1$), mientras que la x_2 no lo está (tiende a $-\infty$ si $s \rightarrow 0$). Vamos a calcular x_1 y comprobar que si $p=n$ obtenemos de nuevo los P_n [pues $x_1(1)=1$]. Debe ser:

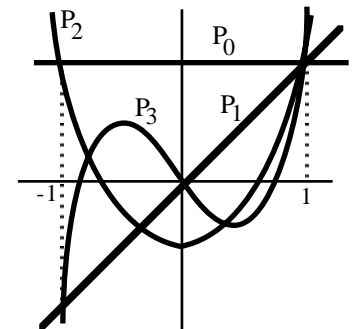
$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k s^{k-2} + 2k(k-1)c_k s^{k-1}] + \sum_{k=1}^{\infty} [2kc_k s^k + 2kc_k s^{k-1}] - \sum_{k=0}^{\infty} p(p+1)c_k s^k = 0 \rightarrow c_k = \frac{p(p+1)-k(k-1)}{2k^2} c_{k-1}, k=1,2,\dots$$

$$\rightarrow x_1(s) = 1 + \frac{p(p+1)}{2} s + \frac{p(p+1)[p(p+1)-2]}{16} s^2 + \dots + \frac{p(p+1)[p(p+1)-2] \dots [p(p+1)-n(n-1)]}{2^n (n!)^2} s^n + \dots$$

Si $p=n$ la regla de recurrencia nos dice que el c_{n+1} y todos lo siguientes se anulan. En particular:

$$p=0 \rightarrow x_1 = 1; \quad p=1 \rightarrow x_1 = 1+s = t; \quad p=2 \rightarrow x_1 = 1+3s + \frac{6[6-2]}{16} s^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}; \dots$$

Se prueba que si $p \neq n$ la x_1 no está acotada cuando $s \rightarrow -2$ ($t \rightarrow -1$) con lo que, salvo constantes, **las únicas soluciones de [L] acotadas a la vez en $t=1$ y $t=-1$ son los polinomios de Legendre.**



Otra ecuación que aparece al abordar problemas físicos es la de **Hermite**: [H] $x'' - 2tx' + 2px = 0$.

Como $t=0$ es regular, existe solución analítica, convergente además en todo \mathbf{R} . La calculamos:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2pc_k t^k = 0 \rightarrow c_k = 2 \frac{(k-2-p)}{k(k-1)} c_{k-2}, k=2,3,\dots \rightarrow$$

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(-p)(2-p)\dots(2n-2-p)}{(2n)!} t^{2n} \right] + c_2 \left[t + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(1-p)(3-p)\dots(2n-1-p)}{(2n+1)!} t^{2n+1} \right]$$

Como ocurría con Legendre, [H] posee solución polinómica cuando $p=n \in \mathbf{N}$. Si $p=2m$, la x_1 pasa a ser un polinomio de grado $2m$, y si $p=2m+1$ es la x_2 la que se convierte en un polinomio de ese mismo grado:

$$p=0 \rightarrow x_1=1; \quad p=1 \rightarrow x_2=t; \quad p=2 \rightarrow x_1=1-2t^2; \quad p=3 \rightarrow x_2=t-\frac{2}{3}t^3; \dots$$

Se llaman **polinomios de Hermite** $H_n(t)$ a las soluciones polinómicas de [H] tales que los términos que contienen la potencia más alta de t son de la forma $2^n t^n$, es decir, a:

$$H_0 = 1; \quad H_1 = 2t; \quad H_2 = 4t^2 - 2; \quad H_3 = 8t^3 - 12t; \dots$$

Citemos ahora, también sin demostrarlas, una serie de propiedades de los H_n que serán útiles, por ejemplo, cuando aparezcan en física cuántica. Una forma de generarlos todos nos lo proporciona el hecho de que:

$$e^{2ts-s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(t) s^n \quad (\text{a la exponencial de la izquierda se le llama **función generatriz** de los } H_n)$$

[Nos limitamos a comprobarlo para los 4 que ya hemos calculado:

$$(1+2ts+2t^2s^2+\frac{4t^3}{3}s^3+\dots)(1-s^2+\frac{1}{2}s^4-\dots) = 1+2ts+(2t^2-1)s^2+(\frac{4t^3}{3}-2t)s^3+\dots]$$

De la función generatriz se deduce una fórmula de **Rodrigues** similar a la de [L]: $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$.

$$[\text{Pues } H_n(t) = \frac{\partial}{\partial s^n} e^{2ts-s^2} \Big|_{s=0} = e^{t^2} \frac{\partial}{\partial s^n} e^{-(t-s)^2} \Big|_{s=0} = (t-s=z, \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial z}) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \Big|_{z=t}]$$

[H] no es la ecuación que aparece inicialmente en cuántica, sino $u'' + (2p+1-t^2)u = 0$. Haciendo $u = xe^{-t^2/2}$ en ella se llega a [H] . Se prueba, aunque no es fácil hacerlo, que las **únicas soluciones** u de la inicial **que tienden a 0** si $|t| \rightarrow \infty$ son las de la forma $u_n(t) = e^{-t^2/2} H_n(t)$, llamadas **funciones de Hermite** de orden n . Sólo estas u_n interesarán físicamente.

Como los P_n de Legendre, se puede ver que también las u_n son **ortogonales**, ahora en $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n u_m dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-t^2} dt = 0, \text{ si } m \neq n; \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_n^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

[Lo comprobamos exclusivamente cuando $n=0,1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_1 = \int_{-\infty}^{\infty} 2te^{-t^2} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_1^2 = -2te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-t^2} = 2\sqrt{\pi}]$$

Para expresar en forma compacta las soluciones de la última ecuación de interés físico que vamos a tratar (la de Bessel) utilizaremos las propiedades de la **función gamma** (función que generaliza el factorial para números no enteros) definida por la siguiente integral impropia convergente:

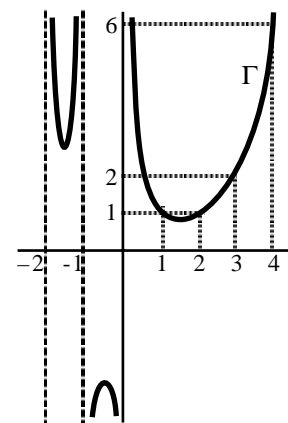
$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad \text{si } s > 0, \text{ y extendida a los } s < 0 \text{ mediante:}$$

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)\dots(s+1)s} \quad \text{si } -n < s < -n+1, n \in \mathbf{N} .$$

Se cumplen para la Γ las siguientes igualdades:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1; \quad \Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma(s+1) = -e^{-x} x^s \Big|_0^{\infty} + s\Gamma(s) = s\Gamma(s)$$

$$\rightarrow \Gamma(s+n) = (s+n-1)\dots(s+1)s\Gamma(s) \rightarrow \Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbf{N}$$



La ecuación de **Bessel** es: [B] $t^2 x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0$, $p \geq 0$.

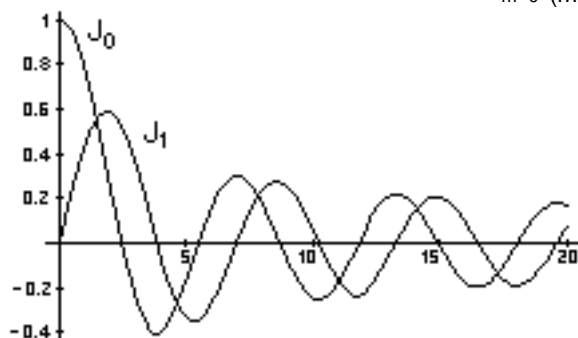
$t=0$ es singular regular con polinomio indicial $r^2 - p^2$, $r_1 = p$, $r_2 = -p$. Entonces $x_1 = t^p \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, $t > 0$, es una solución (acotada en $t=0 \forall p$) definida por una serie que converge en todo \mathbf{R} . Llevándola a [B]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [k(2p+k)c_k t^{p+k} + c_k t^{p+k+2}] = 0 \rightarrow c_1 = 0; c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}, k=2,3,\dots \rightarrow$$

$$c_1 = c_3 = \dots = 0; c_2 = -\frac{c_0}{2^2(p+1)}; c_4 = \frac{c_0}{2^4 2(p+1)(p+2)}; \dots \rightarrow x_1 = c_0 t^p \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{2^{2m} m! (p+1) \dots (p+m)} \right]$$

Eligiendo $c_0 = 1/[2^p \Gamma(p+1)]$ tenemos: $J_p(t) \equiv \left[\frac{t}{2} \right]^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(p+m+1)} \left[\frac{t}{2} \right]^{2m}$ [función de Bessel de primera especie y orden p]

En particular es: $J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left[\frac{t}{2} \right]^{2m}$, $J_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+1)!} \left[\frac{t}{2} \right]^{2m+1}$,



cuyas gráficas son las de la izquierda. Se prueba que, al igual que J_0 y J_1 , todas las J_p son oscilatorias y que para t grande se parecen a:

$$J_p \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left[t - (2p+1)\frac{\pi}{4}\right]$$

Cada J_p tiene un número infinito de ceros en $(0, \infty)$ [que deben conocerse para resolver algunas EDPs]:

los de J_0 son: 2.4048, 5.5201, 8.6532, ... ;

los de J_1 : 3.8317, 7.0156, 10.1735, ...

Para calcular una segunda solución linealmente independiente de [B] (necesariamente no acotada en $t=0$), el método de Frobenius nos dice que si $r_1 - r_2 = 2p \neq 0, 1, \dots$ existe una x_2 de la forma:

$$x_2 = t^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, t > 0 \text{ (llevándola a [B] se tiene } J_{-p}(t) \equiv \left[\frac{t}{2} \right]^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-p+m+1)} \left[\frac{t}{2} \right]^{2m} \text{)}$$

Si $p \notin \mathbf{Z}$, pero $2p \in \mathbf{Z}$ ($p = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$), la x_2 podría contener un $\ln t$ pero se comprueba que no es así (caso **c**) de Frobenius, pero con $d=0$). De hecho, haciendo $p=1/2$ en $J_{\pm p}$ se obtienen las soluciones

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{t}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1/2) \dots 1/2 \Gamma(1/2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \text{sent}, J_{-1/2}(t) = \dots = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \text{cost},$$

que son linealmente independientes (la expresión asintótica es exacta para $p = \pm 1/2$). Como veremos que $J_{p+1} = 2pJ_p/t - J_{p-1}$, todas las $J_{(2n+1)/2}$, $n \in \mathbf{Z}$, son **funciones elementales** (las demás J_p no lo son).

Para $p = n \in \mathbf{N}$ el atajo anterior no sirve, pues es fácil ver que cambiando n por $-n$ la J_{-n} que aparece no es independiente de J_n [es $J_{-n} = (-1)^n J_n$]. Tendríamos que hallar las x_2 de Frobenius (y obtendríamos un $\ln t$ en su larga expresión). Por ejemplo, para $p=0$ (que seguro contiene logaritmos) se acaba obteniendo:

$$x_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right] \left[\frac{t}{2} \right]^{2m} + J_0(t) \ln t \equiv K_0(t), t > 0 \text{ [función de Bessel de segunda especie y orden } 0 \text{]}$$

Pero en muchos problemas físicos en los que surge la ecuación [B] es necesario que las soluciones estén acotadas, y para ellos no servirá de nada el conocimiento de estas complicadas segundas soluciones.

Lo que sí puede ser útil en el futuro será conocer las siguientes propiedades de las derivadas de las J_p :

$$\frac{d}{dt} [t^p J_p(t)] = t^p J_{p-1}(t), \frac{d}{dt} [t^{-p} J_p(t)] = -t^{-p} J_{p+1}(t) \text{ (En particular es } [tJ_1]' = J_0, [J_0]' = -J_1 \text{)}$$

(Son inmediatas: $\frac{d}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+2p}}{2^{2m+p} m! \Gamma(p+m+1)} = t^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+p-1}}{2^{2m+p-1} m! \Gamma(p+m)}$ y similar la otra).

Derivando y despejando la J_p' en ambas: $J_p' = J_{p-1} - \frac{p}{t} J_p = -J_{p+1} + \frac{p}{t} J_p \Rightarrow J_{p+1} = \frac{2p}{t} J_p - J_{p-1}$,

relación de recurrencia, ya citada, que expresa cada J_{p+1} en función de las anteriores.

3.5 El punto del infinito

Nos preocupamos por el comportamiento de las soluciones de una lineal de segundo orden para grandes valores de t . En pocas ocasiones una ecuación es resoluble elementalmente. Por otra parte, las soluciones en forma de serie (salvo que se puedan identificar con funciones elementales) no dan ninguna información para grandes t , incluso aunque converjan para todo t . Si queremos ver lo que sucede cuando $t \rightarrow \infty$, la idea natural es efectuar el **cambio de variable** $t=1/s$ y estudiar el comportamiento de las soluciones de la nueva ecuación cuando $s \rightarrow 0^+$, que será fácil de precisar si $s=0$, llamado **punto del infinito** de la ecuación inicial, es punto regular o singular regular de esta ecuación.

A diferencia de los cambios $s=t-t_0$ que no modifican las derivadas, para hacer este cambio debemos acudir a la regla de la cadena. Denotando las derivadas respecto a s con puntos tenemos:

$$t = \frac{1}{s} \rightarrow x' = \dot{x} \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{t^2} \dot{x}; \quad x'' = \frac{1}{t^4} \ddot{x} + \frac{2}{t^3} \dot{x} \rightarrow \boxed{x' = -s^2 \dot{x}, \quad x'' = s^4 \ddot{x} + 2s^3 \dot{x}}$$

Ej 1. $(1+t^2)x'' + tx' - x = 0$ Estudiemos su comportamiento para grandes valores de t :

$$t = \frac{1}{s} \rightarrow \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) s^4 \ddot{x} + \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) 2s^3 \dot{x} - \frac{s^2}{s} \dot{x} - x = s^2(1+s^2)\ddot{x} + s(1+2s^2)\dot{x} - x = 0.$$

Para esta ecuación $s=0$ es singular regular, con $r = \pm 1$, con lo que sus soluciones para $s>0$ son:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{k+1} = c_0 s + c_1 s^2 + \dots, \quad c_0 \neq 0; \quad x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^{k-1} + d x_1 \ln s, \quad b_0 \neq 0.$$

Cuando $s \rightarrow 0^+$, la primera solución $x_1 \rightarrow 0$, mientras que la segunda $x_1 \rightarrow \infty$ (si $b_0 > 0$, sea $d=0$ ó $d \neq 0$), con lo que deducimos, sin necesidad de resolver nada, que existen soluciones de la ecuación inicial que, cuando $t \rightarrow \infty$, tienden a 0, mientras que otras tienden a ∞ , y por tanto son no acotadas para grandes valores de t .

[Como la ecuación es resoluble elementalmente puesto que $x_1 = t$ es solución que salta a la vista, podemos en este caso concreto hallar su solución general y comprobar las afirmaciones anteriores:

$$x_2 = t \int t^{-2} e^{-\int a dt} = t \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{1+t^2} \rightarrow x = c_1 t + c_2 \sqrt{1+t^2}.$$

Las soluciones de la forma $C(t - \sqrt{1+t^2}) = -\frac{C}{t + \sqrt{1+t^2}} \rightarrow 0$, y otras claramente tienden a ∞ .

De paso observemos también que $x_1 = t = \frac{1}{s}$ es la solución x_2 que hubiéramos obtenido arriba (es $d=0$).

Para las ecuaciones de Hermite y Bessel de la sección anterior hacer $t=1/s$ parece adecuado para conocer su comportamiento para t grande, pero por desgracia, se comprueba que el punto $s=0$ en ambos casos es singular no regular. Aunque para **Legendre** lo interesante físicamente es lo que sucede en $[-1, 1]$, vamos a analizar su punto del infinito. En 3.4 obtuvimos sus series solución en torno a $t=0$ (que hablan sólo de lo que ocurre en $|t| < 1$) y en torno a $t=1$ (hablan de $t \in (-1, 3)$). Haciendo en Legendre $s=1/t$ obtenemos:

$$[L] (1-t^2)x'' - 2tx' + p(p+1)x = 0, \quad p \geq 0 \rightarrow [L_{\infty}] s^2(s^2-1)\ddot{x} + 2s^3\dot{x} + p(p+1)x = 0.$$

Para $[L_{\infty}]$ es $s=0$ singular regular, con $a^*(s)=2s^2/(s^2-1)$ y $b^*(s)=p(p+1)/(s^2-1)$ analíticas en $|s| < 1$. Las series solución de $[L_{\infty}]$ convergerán al menos en ese intervalo y de ellas podremos extraer información, por tanto, sobre las soluciones de $[L]$ para $|t| > 1$. Como el polinomio indicial de $[L_{\infty}]$ es $r^2 - r - p(p+1)$ (de raíces $1+p$ y $-p$) y como para todo $p \geq 0$ es $r_1 = 1+p > 0$ deducimos, por ejemplo, que siempre hay soluciones de $[L]$ que tienden a 0 si $t \rightarrow \infty$.

$$(Pues $x_1(s) = s^{1+p} \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \rightarrow 0$ si $s \rightarrow 0^+$; o sea, $x_1(t) = t^{-(1+p)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k} \rightarrow 0$).$$

Resolvamos por series $[L_{\infty}]$ en el caso más sencillo: $p=0$ (único valor para el que $s=0$ es regular):

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \rightarrow c_k = \frac{k-2}{k} c_{k-2}, \quad k=2,3,\dots \rightarrow x = c_0 + c_1 \left[s + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}s^5 + \dots \right] = c_0 + c_1 \left[t^{-1} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{5}t^{-5} + \dots \right],$$

serie (no de potencias) que nos describe las soluciones de $[L]$ para $|t| > 1$, valores para los que converge.

$$[De otra forma: $(1-t^2)x'' + 2tx' = 0 \rightarrow x' = \frac{c_1}{1-t^2} \rightarrow x = c_0 + c_1 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = c_0 + c_1 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right|$, válidas si $t, s \neq 1$].$$