

Soluciones a los problemas 1-16 de Cálculo I (2006-2007).

1. a) Si $x \geq 2$, numerador y denominador son ≥ 0 , si $x < -2$ son negativos. $A = (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$.
 b) $-5 < x - 3 < 5 \Rightarrow -2 < x < 8$. $A = (-2, 8)$.
 c) $x - 5\pi \geq 4\pi$ ó $x - 5\pi \leq -4\pi \Rightarrow x \geq 9\pi$ ó $x \leq \pi$. $A = (-\infty, \pi] \cup [9\pi, \infty)$.
 d) $x \leq 4/7 \Rightarrow x(x-7) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x > 4/7 \Rightarrow (x-1)(x+8) = 0 \Rightarrow x = 1$. $A = \{0, 1\}$.
 e) $-2 \leq 1 - \frac{1}{x} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq -1$ y $\frac{1}{x} \leq 3 \Rightarrow (x > 0 \text{ ó } x \leq -1)$ y $(x \geq \frac{1}{3} \text{ ó } x < 0)$. $A = (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{3}, \infty)$.
 f) $x(x-1)(x+2) > 0$. $A = (-2, 0) \cup (1, \infty)$.
 g) $|x(x-2)| < 1 \Rightarrow -1 < x(x-2) < 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 < 0$, $x^2 - 2x + 1 > 0$. $A = (1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + \sqrt{2})$.
 h) $x < 0 \Rightarrow -2x + 3 \leq 5 \Rightarrow x \geq -1$; $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow x - x + 3 \leq 5$; $x \geq 3 \Rightarrow 2x - 3 \leq 5 \Rightarrow x \leq 4$. $A = [-1, 4]$.
2. a) $(-\infty, -2) \cup (2, 7) \cup (7, \infty)$. No tiene ínfimo ni supremo. Es abierto. No es cerrado
 b) Ínfimo = -2 (mínimo). Supremo = 2 (máximo). No es abierto. No es cerrado.
 c) Ínfimo = -1 (no es mínimo). Supremo = $\frac{3}{2}$ (máximo). No es abierto. No es cerrado.
 d) Ínfimo = 10^{-7} (sin considerar $n = 0$) (mínimo). No tiene supremo. No es abierto. Es cerrado.
 e) No tiene ínfimo ni supremo. Está acotado. Es abierto. Es cerrado.
3. a) $D_f = \mathbf{R} - \{8\}$, b) $D_g = (-1, 1)$, c) $D_h = \mathbf{R} - \{\pm \sqrt{\frac{2n-1}{2}}, n \in \mathbf{N}\}$, d) $D_h = [e^{-1}, e]$.
4. $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{2}{x} + 2} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{x+1}{x}}$, $D = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$. $(g \circ f)(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}}$, $D = (-2, \infty)$.
 $(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} + 2}$, $D = [-2, \infty)$. $\text{im } f = [0, \infty)$, $\text{im } g = \mathbf{R} - \{0\}$. $f^{-1}(x) = x^2 - 2$, $\forall x \in [0, \infty)$.
5. $\cos^2 x - \sin^2 x - 5 \cos x - 2 = 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ (= 3 imposible) $\rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
 b) $\log x^2 = \log(x+2)$, $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow x = 2$ ($x = -1$ no lo cumple).
 c) Si $x \geq 1$, $e^{2|\log x|} = x^2 < 8x \rightarrow x < 8$; si $0 < x \leq 1$, $e^{2|\log x|} = x^{-2} < 8x \rightarrow x > \frac{1}{2}$. $x \in (\frac{1}{2}, 8)$.
 d) $|\tan x| < 1 \Leftrightarrow x \in \dots \cup (-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}) \cup (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}) \cup \dots$.
6. a) $a_n \rightarrow 1$. $|a_n - 1| = \frac{1 - (-1)^n}{1+n} \leq \frac{2}{1+n} < \varepsilon$ si $n \geq N > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. $\varepsilon = 1, 0.1, 0.01 \Rightarrow N = 2, 20, 200$.
 b) $b_n \rightarrow 0$. $|b_n - 0| = 10^{7-n} < \varepsilon$. Si $\varepsilon = 1 \Rightarrow N = 8$, $\varepsilon = 0.1 \Rightarrow N = 9$, $\varepsilon = 0.01 \Rightarrow N = 10$.
 c) $c_n \rightarrow 0$. $|\frac{300 \cos n - 2n}{n^2}| \leq \frac{300 + 2n}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 \varepsilon - 2n - 300 > 0 \Rightarrow n \geq N > \frac{1}{\varepsilon}(1 + \sqrt{1 + 300\varepsilon})$.
 Si $\varepsilon = 1, 0.1, 0.01 \Rightarrow N = 19, 66, 301$. (Con calculadora se ve que bastan: $N = 17, 61, 293$).
7. a) $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$. La implicación inversa es falsa ($a_n = (-1)^n$ diverge, pero $|a_n|$ converge).
 b) $|a_n^2 - a^2| = |a_n + a| |a_n - a| \leq (K + |a|) |a_n - a|$ con $|a_n| < K$. La implicación inversa no es cierta.
8. a) $\frac{n^2 - 30n}{3 - 100n}$ diverge a $-\infty$; b) $\frac{17\sqrt{n+3} + 9}{\sqrt{n^2 + 1} - 1} \rightarrow 0$; c) $(-1)^n \left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} - 1 \right) \rightarrow 0$;
 d) $(\sqrt{2n^2 - 1} - 1)^4$ diverge a ∞ ; e) $(2 - \frac{1}{n})^{2n}$ diverge a ∞ ; f) $\frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2-1}{2n} \rightarrow \frac{1}{4}$;
 g) $(-1)^n \sqrt{n} - n$ diverge a $-\infty$; h) $\frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{2}$; i) $n \left(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n-1}} - \sqrt{2} \right) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$;
 j) $\frac{\sqrt{2n^4 + 3} - 4}{n^2 + 5 \text{sen } n} \rightarrow \sqrt{2}$; k) $\left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n = \left(1 + \frac{2}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{2n}{n-1}} \rightarrow e^2$; l) $1 + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow 2$.

9. a) $\sqrt{n^2 + an} - bn = \frac{(1-b)n^2 - an}{\sqrt{n^2 + an} + bn}$. Si $b \neq 1$ diverge. Si $b = 1$ converge a $\frac{a}{2}$.

b) $(a^n + b^n)^{1/n} \rightarrow \max(a, b)$. c) $a = 1 \Rightarrow (a + \frac{b}{n})^n \rightarrow e^b$. Si $a > 1$ diverge. Si $a < 1$ el límite es 0.

10. Inducción: $a_1 < 2$, $a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > a_n \Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 2 = (a_n + 1)(a_n - 2) < 0$, y esto es cierto pues $0 \leq a_n < 2$.

$a_n \rightarrow a$, $a_{n-1} \rightarrow a \Rightarrow a = \sqrt{2 + a} \Rightarrow a = 2$.

11. a) $f(x) = 1 + \sqrt{4+x}$ continua en $x=0$: $|\sqrt{4+x} - 2| = \frac{|x|}{\sqrt{4+x} + 2} \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow \delta = 2\varepsilon$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$: $\forall \varepsilon > 0 \exists K = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ tal que si $x > K$ entonces $|\frac{1}{1+x^2}| < \frac{1}{x^2} < \varepsilon$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{x^3} = \infty$: $\forall K > 0 \exists \delta > 0$ tal que, si $0 < x < \delta$ entonces $\frac{1+x}{x^3} > K$. Basta tomar $\delta = \frac{1}{K^{1/3}}$.

12. f, g pares $\Rightarrow f+g, fg, f \circ g$ pares. f, g impares $\Rightarrow f+g, f \circ g$ impares, fg par.

f par, g impar $\Rightarrow f+g$ no es par ni impar, fg impar, $f \circ g, g \circ f$ pares.

Si f es impar, $\lim_{x \rightarrow 0} = b$ y $\{a_n\} \rightarrow 0$ es $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b = \lim_{n \rightarrow \infty} f(-a_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = -b \Rightarrow b = 0$.

13. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$ discontinua en todo \mathbf{R} . Pero $|f(x)| = 1$ continua en todo \mathbf{R} .

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en $x \neq 0$ y discontinua en 0.

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$ es continua en $x = 0$ y discontinua en $\mathbf{R} - \{0\}$.

14. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{-x} = -1$; no existe límite.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x^2}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} x = 1 \cdot 0 = 0$. c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(\log x^2) = -\frac{\pi}{2}$. e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} \text{sen } \frac{\pi}{x}$ no existe, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} \text{sen } \frac{\pi}{x} = 0$; no existe límite.

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \frac{1}{x} = \infty$. g) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$. h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$.

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x-1} = 3$. j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)^2}{(x-1)^2} \frac{x-1}{x+1} = 1 \cdot 0 = 0$. k) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\text{sen } x} = 0$.

l) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{arc sen } x}{x} = \frac{\pi}{2}$. m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3+2^{1/x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3+2^{1/x}} = \frac{1}{3}$; no existe límite.

n, ñ) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{3+2^{1/x}} = \frac{1}{4}$. o) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x} + x} = -\frac{1}{2}$. p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x} - x) = \infty$.

q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{100}}{(2x+5)^{100}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+5}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}}$. r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+\text{sen}^3 x}{5x+6} = \frac{1}{5}$.

s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+x^{-2}}}{x+5} = -1$. t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(\log x^2) = \frac{\pi}{2}$. u) No existe límite.

15. Si fuese $f(0) = 0$ ó $f(1) = 1$, serían puntos fijos. Sea $f(0) > 0$, $f(1) < 1$. Entonces el teorema de Bolzano aplicado a $g(x) = f(x) - x$ asegura que hay $x \in (0, 1)$ con $g(x) = 0$.

16. $f \rightarrow b \Rightarrow \exists K / |f(x) - b| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |b|$ si $x \geq K \Rightarrow f$ acotada en $[K, \infty)$. Y en $[a, K]$ lo está por ser continua. No tiene que alcanzar su valor máximo (por ejemplo, $f(x) = -e^{-x}$ no lo hace).

Soluciones a los problemas 17-42 de Cálculo I (2006-2007).

17. a) $f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$, $f'(0) = 0$. $f''(x) = 6x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 4 \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, en $\mathbf{R} - \{0\}$.

b) $g'(x) = 1 + \log|x|$, en $\mathbf{R} - \{0\}$. $g''(x) = \frac{1}{x}$, en $\mathbf{R} - \{0\}$.

c) $h'(x) = \frac{2}{x[1+4(\log|x|)^2]}$, en $\mathbf{R} - \{0\}$. $h''(x) = -\frac{2[1+8\log|x|+4(\log|x|)^2]}{x^2[1+4(\log|x|)^2]^2}$, en $\mathbf{R} - \{0\}$.

d) $k'(x) = \begin{cases} \frac{7}{3}x^{4/3} - 2x & \text{si } x > 1 \\ 2x - \frac{7}{3}x^{4/3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$. $k''(x) = \begin{cases} \frac{28}{9}x^{1/3} - 2 & \text{si } x > 1 \\ 2 - \frac{28}{9}x^{1/3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

e) $l'(x) = -\frac{2x}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$, en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. $l''(x) = \frac{8x^4 - 2x^2 - 2}{(1-x^2)^2(1-2x^2)^{3/2}}$, en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

f) $m'(x) = (5x^2 + 2x + 1)(3x + 1)^{-4/3}$ en $\mathbf{R} - \{-\frac{1}{3}\}$. $m''(x) = 2(5x^2 + 4x - 1)(3x + 1)^{-7/3}$ en $\mathbf{R} - \{-\frac{1}{3}\}$.

18. Por continuidad: $a + b = 1$. Por derivabilidad: $-1 = 2b$. $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

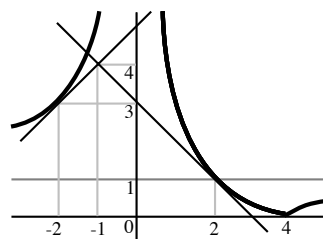
19. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $y = e^{a^2-a} [(2a-1)(x-a) + 1]$, que pasa por el origen si: $2a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, 1$. Por tanto, los puntos pedidos son: $(-\frac{1}{2}, e^{3/4})$ y $(1, 1)$.

20. Buscamos $x \in (0, 1)$ con $f'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{\pi}{4}$ (pendiente de la recta). $x = 1 - \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$ lo cumple.
[Que existía un c con esa pendiente se podría deducir del teorema del valor medio].

21. $g(x) = \begin{cases} -1 + 4/x, & x \in (0, 4] \\ 1 - 4/x, & x \in (-\infty, 0) \cup [4, \infty) \end{cases}$

$g'(x) = \begin{cases} -4/x^2, & x \in (0, 4) \\ 4/x^2, & x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty) \end{cases}$

Rectas tangentes: $y = x + 5$, $y = -x + 3$. Corte: $(-1, 4)$.



22. Derivando implícitamente: $y'(x) = -\frac{2xy}{1+x^2+3y^2} \rightarrow y'(2) = -\frac{1}{2}$. La recta tangente es: $y = 2 - \frac{x}{2}$.

[La y no se puede despejar, pero sí se podría despejar la x].

23. $f'(0^+) = 2$, $f'(0^-) = 0 \Rightarrow$ no es derivable en $x = 0$. $f'(x) \neq 0$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}] - \{0\}$.

f decrece en $(-\frac{1}{2}, 0)$ y crece en $(0, \frac{1}{4}) \Rightarrow x = 0$ es el mínimo. $f(-\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{4}) \Rightarrow$ máximo en $x = \frac{1}{4}$.

24. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. $f(1) = \frac{\pi}{2}$, $f(-1) = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} \log 3$. Máximo en 1 y mínimo en -1 .

25. a) $f(-8) = -52$, $f(64) = -16$, $f(0) = 0$, $f'(27) = 0$, $f(27) = -27$. Mínimo en -8 y máximo en 0 .

b) $g(0) = 2$, $g(\pi) = \pi + 2$, $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. $g'(\frac{\pi}{6}) = 0$, $g(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$. Mínimo en $\frac{\pi}{2}$ y máximo en π .

c) $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Valor mínimo: $h(4) = 7\sqrt{2}$. El valor máximo no existe.

26. $f'(x) = 1 - 2 \operatorname{sen} x \rightarrow$ en $x = \frac{\pi}{6}$ valor máximo. El valor mínimo será $f(0) = 2 < f(1) = 1 + 2 \cos 1$,
pues $\cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (o porque, como veremos, $\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \dots > \frac{1}{2}$, serie de Leibniz).

$f'(x) \geq 1 - 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} > 0$ si $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow$ existe f^{-1} . Como $f^{-1}(2) = 0$ (es $f(0) = 2$): $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = 1$.

27. $f'(x) = \operatorname{ch} x e^{\operatorname{sh} x} + 1 > 0 \forall x \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en todo $\mathbf{R} \Rightarrow$ existe su inversa.

Al ser f derivable, f^{-1} también lo es y se tiene que: $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

28. $f(\frac{\pi}{2}) = e - \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, $f(\pi) = -\pi < 0$ y f continua $\stackrel{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}$ se anula al menos una vez.

Como además $f'(x) = \cos x e^{\sin x} - 1 < 0$ en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ($\cos x$ es negativo y la exponencial es positiva), f es estrictamente decreciente en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ y, por tanto, se anula exactamente una vez.

29. $f'(x) = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}} \Rightarrow f$ decrece en $(-1, 0]$ y crece en $[0, 1)$. $f(\frac{3}{5}) = \frac{9}{20} < \frac{2}{3} < f(\frac{4}{5}) = \frac{16}{15}$ y f continua en $[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] \Rightarrow \exists c \in (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ con $f(c) = \frac{2}{3}$. Al ser f creciente en el intervalo, el c es único.

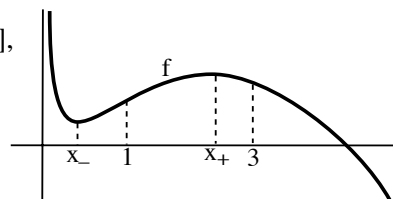
30. $f'(x) = -\frac{x^2-3x+1}{3x(1+x^2)} = -\frac{(x-x_-)(x-x_+)}{3x(1+x^2)}$, con $x_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. $2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow x_- \in (0, \frac{1}{2})$, $x_+ \in (\frac{5}{2}, 3)$.

$f \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$, f decrece en $(0, x_-]$, $f(x_-) > 0$ [$\arctan x, -\log x > 0$ en $(0, 1)$],

$f(1) = \frac{\pi}{4}$, f crece en $[x_-, x_+]$ y decrece en $[x_+, \infty)$, $f \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty \Rightarrow$

la continua f corta una única vez el eje x en un $c > x_+$ de $(0, \infty)$.

f estrictamente decreciente en $[3, \infty) \Rightarrow$ es inyectiva en el intervalo.



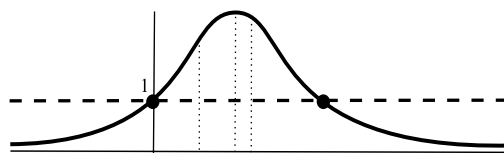
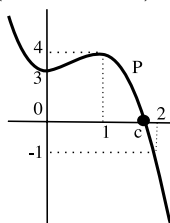
31. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{e^{x^2-3x}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{2x-3} \frac{1}{e^{x^2-3x}} = 0$. $f'(x) = (3+3x^2-2x^3)e^{3x-x^2}$. $f'(1) = 4e^2$ Bolzano $\Rightarrow f' = 0$ en algún $c \in (1, 2)$. $f'(2) = -e^2$

$$f' = 0 \Leftrightarrow P(x) = 3 + 3x^2 - 2x^3 = 0.$$

$P'(x) = 6x(x-1) \rightarrow P$ crece en $[0, 1]$ y decrece

en el resto; $P(0) = 3, P(1) = 4, P(2) = -1$

$\Rightarrow P$ se anula sólo en el $c \in (1, 2)$.



Con $f(0) = 1$ y los cálculos anteriores, la gráfica de f es más o menos \nearrow . $f(x) = 1$ exactamente en 2 puntos.

32. La gráfica muestra que claramente tiene 1 solución si $a < 0$ y ninguna si $a = 0$.

Vemos de varias formas que si $0 < a < e$ no hay ninguna, 1 si $a = e$ y 2 si $a > e$:

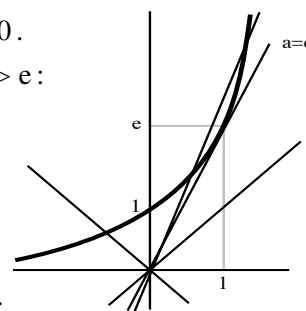
Habrà 1 si ax y e^x son tangentes, es decir, para el b tal que la recta tangente

$$y = e^b + e^b(x-b) \text{ pase por } (0,0) \rightarrow b = 1 \rightarrow a = e.$$

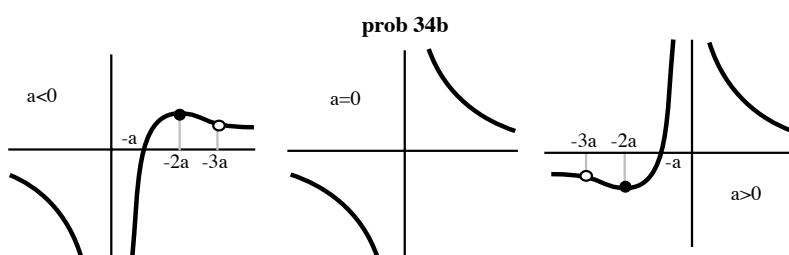
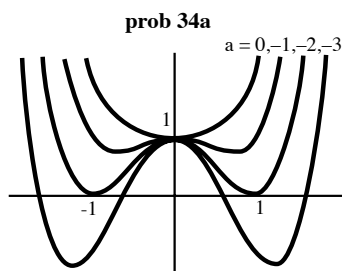
O bien: $g(x) = e^x - ax$, $g'(x) = e^x - a \rightarrow$ decrece hasta $x = \log a$ y luego crece.

El valor mínimo $g(\log a) = a(1 - \log a)$ es $>, =, < 0$ según $a <, =, > e$.

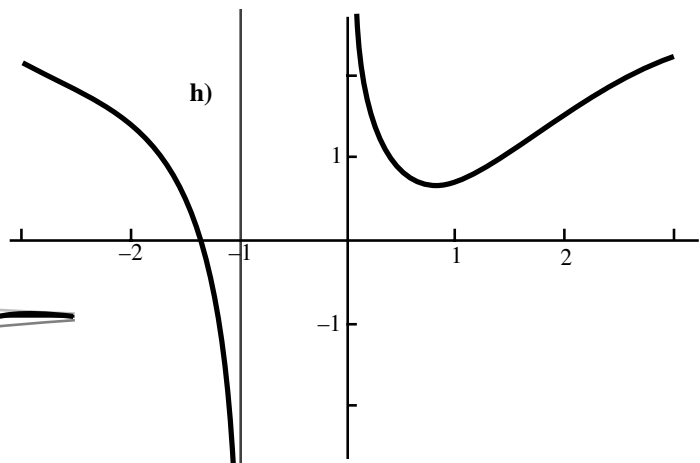
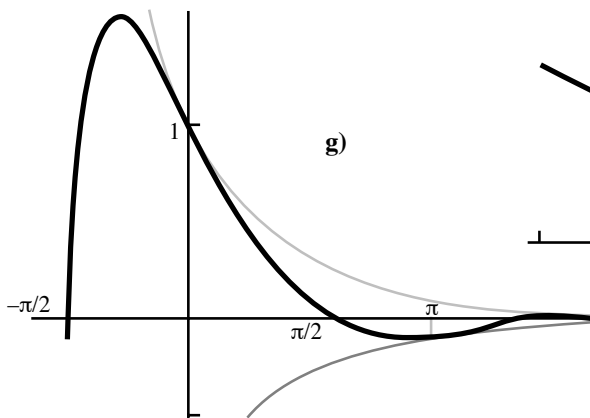
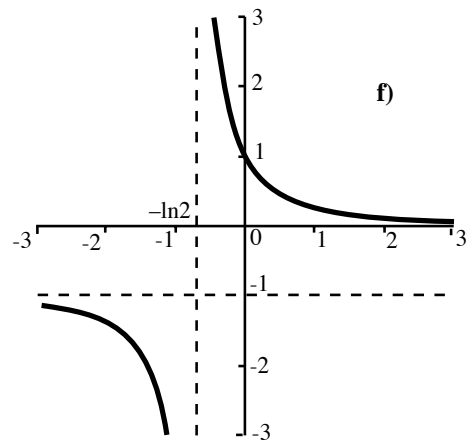
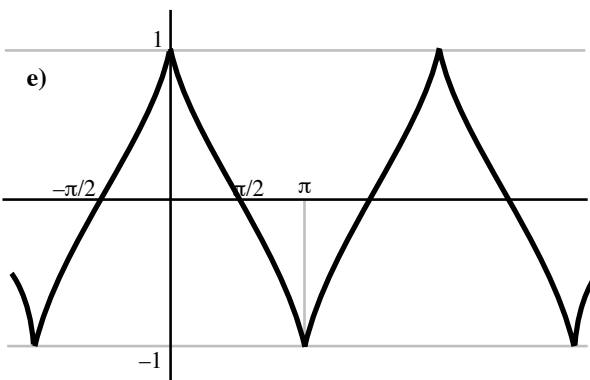
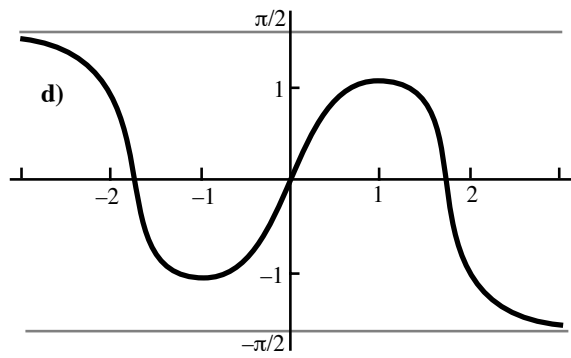
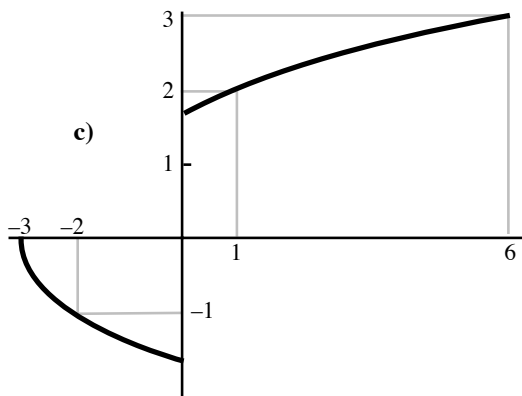
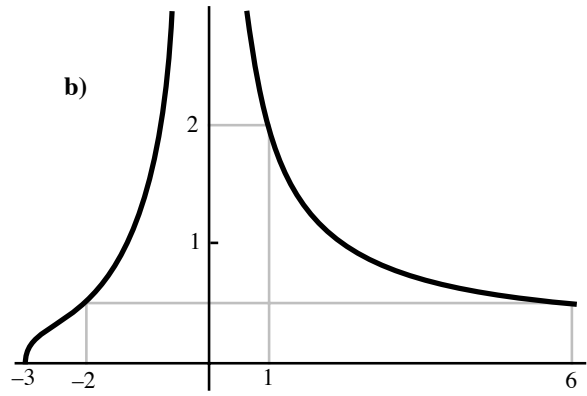
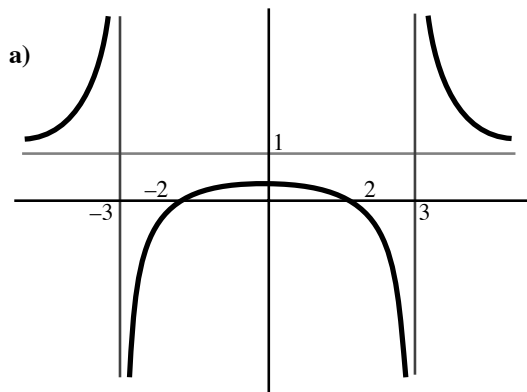
O bien, dibujando la gráfica de $h(x) = xe^{-x}$ y viendo cuántas veces corta $y = \frac{1}{a}$.



34.



33.



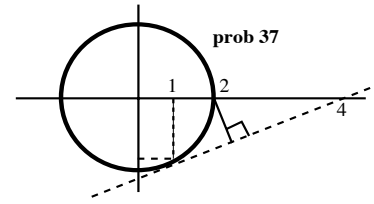
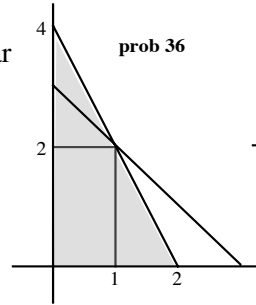
35. Mínimos en $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$. Máximos en $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.

36. Rectas por $(1, 2)$: $y = 2 + m(x - 1)$. Hay que minimizar

$$A(m) = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{m})(2 - m), \text{ con } m \in (-\infty, 0).$$

Área mínima si $m = -2$ ($x = 2, y = 4$).

No existe el de área máxima.



37. Recta tangente $y = \frac{x-4}{\sqrt{3}}$. Distancia al cuadrado:

$$D(x) = (x-2)^2 + (\frac{x-4}{\sqrt{3}})^2 \text{ mínima si } x = \frac{5}{2} \rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[O bien, el punto más próximo pertenece también a la perpendicular que pasa por $(2, 0)$: $y = -\sqrt{3}(x-2)$].

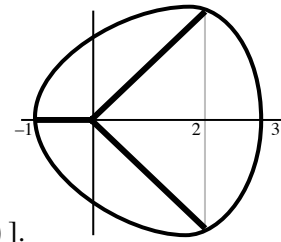
38. $3y^2 = 21 + 20x - x^4 \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{21+20x-x^4}{3}}$. Definida si $x \in [-1, 3]$.

$$y' = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{5} \approx 1.71. y(\sqrt[3]{5}) \approx \pm 3.94. y(2) = \pm\sqrt{15}.$$

Máximos y mínimos de: $D(x) \equiv (d[(x, y), (0, 0)])^2 = -\frac{1}{3}x^4 + x^2 + \frac{20}{3}x + 7$.

$$D'(x) = 0 \rightarrow x = 2, D(2) = 19. D(-1) = 1, D(3) = 9.$$

Mínimo de D si $x = -1$ [punto $(-1, 0)$] y máximo si $x = 2$ [puntos $(2, \pm\sqrt{15})$].

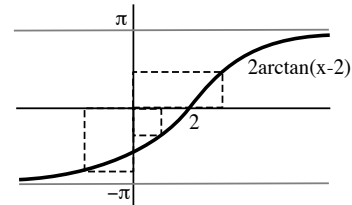


39. Función a minimizar: $D(x) = |x| + |2\arctan(x-2)|$.

Es claro que el mínimo se da en $[0, 2] \rightarrow D' = \frac{(x-1)(x-3)}{1+(x-2)^2} = 0$ si $x = 1$.

$D(1)$ máximo local. Además: $D(0) = 2\arctan 2 > 2 = D(2)$,

pues $\arctan 2 > \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1$. Punto más cercano: $(2, 0)$.

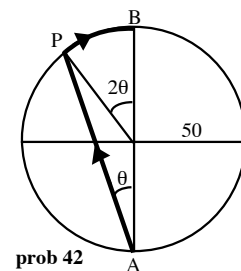
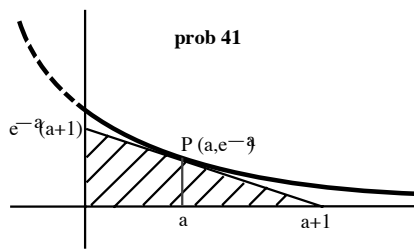
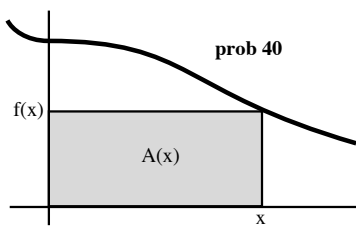


40. Área del rectángulo: $A(x) = xf(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+4}}$. $A'(x) = \frac{8-x^3}{2(x^3+4)^{3/2}} \Rightarrow x = 2$ máximo local. $A_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

41. Área del triángulo limitado por la tangente en $x = a$: $A(a) = \frac{1}{2}e^{-a}(1+a)^2$. Es máxima si $a = 1$.

42. Distancia $AP = 100\cos\theta$. Distancia $PB = 100\theta$. Tiempo empleado: $T(\theta) = 2\cos\theta + \theta$.

Mínimo si $\theta = \pi/2$ ($P = A$, no debe tirarse al agua).



Soluciones a los problemas 43-69 de Cálculo I (2006-2007).

43. $\{a_n\}$ acotada inferiormente por 0 (los a_n son positivos) y decreciente (pues $\frac{n+2}{3n+1} < 1 \Leftrightarrow 2n > 1$)
 $\Rightarrow \exists \lim a_n = a \Rightarrow a = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 0$. Como $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$ la serie converge (y confirma $a_n \rightarrow 0$).
44. a) $(a_n)^{1/n} = \frac{2^n}{n} \rightarrow \infty$. Divergente. (O porque $\{a_n\} \not\rightarrow 0$). b) $\frac{3+\cos n}{\sqrt{n}} \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$. Divergente.
 c) Geométrica. $|-\frac{\pi}{e}| > 1 \Rightarrow$ Divergente. d) $\sum \frac{e^{-100}}{n}$ diverge, $\sum \frac{e^{-n}}{100}$ converge \Rightarrow Divergente.
 e) $\frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}} = \frac{n+1}{n} e^{-2n-1} \rightarrow 0$ ó $n^{1/n}e^{-n} \rightarrow 0 \Rightarrow$ Convergente.
 f) $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 2\frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0 \Rightarrow$ Convergente. g) $\frac{2+(-1)^n}{n^2+3} \leq \frac{3}{n^2+3}$, de igual convergencia que $\sum \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ Convergente.
 h) $\frac{n+24}{25n} \rightarrow \frac{1}{25} \Rightarrow a_n$ no tiende a 0 \Rightarrow Divergente. i) $(\frac{n}{n+2})^n \rightarrow e^{-2} \Rightarrow$ Divergente.
 j) $\frac{1/n}{1/(\log n)^2} \rightarrow 0$ y $\sum \frac{1}{n}$ divergente \Rightarrow Divergente. k) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2} < \infty \Rightarrow$ Convergente.
 l) $\frac{4n-1}{n(n-1)} \rightarrow 0$ y decreciente \Rightarrow Convergente. m) $\tan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, porque $\frac{\tan x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ y $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow$ Divergente.
 n) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!(n+1)!}{n!n!} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ Convergente.
 ñ) $|\frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+\cos^3 n}}| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3-1}}$, $\frac{1/\sqrt{n^3-1}}{1/n^{3/2}} \rightarrow 1$ y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ convergente \Rightarrow Convergente (absolutamente).
 o) $\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2-1}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}$. Convergente.
45. a) $18 \sum_{n=2}^\infty (\frac{2}{3})^n + 9 \sum_{n=2}^\infty (-\frac{1}{3})^n = \frac{99}{4}$. b) $\sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}) = 1$.
46. a) $c > 0$ (Leibniz). b) $\sum \frac{2}{e^{n+1}}$ converge \Rightarrow la dada converge si lo hace $\sum \frac{c^n}{e^{n+1}} \Leftrightarrow |c| < e$.
 c) Cociente: $\frac{(n+1)^c}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \rightarrow r < 1 \Leftrightarrow c \leq 3$. d) Geométrica: $|\frac{c-1}{4}| < 1 \Leftrightarrow -3 < c < 5$.
 e) $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n+1}{n+2} |2c-1|^{2n+1} \Rightarrow$ converge si $|2c-1| < 1$; si $c = 1$ diverge y si $c = 0$ converge; $0 \leq c < 1$.
 f) $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{2|c|}{n+1} \rightarrow 0 \forall c \Rightarrow$ converge $\forall c \in \mathbf{R}$.
47. $\sum_{n=2}^\infty \frac{2^{n-2}}{a^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^\infty (\frac{2}{a})^n = \frac{1}{4} \frac{4/a^2}{1-2/a} = \frac{1}{a(a-2)}$, si la serie geométrica converge $\Leftrightarrow |\frac{2}{a}| < 1 \Leftrightarrow |a| > 2$.
 $a(a-2) = 3$ si $a = 3, -1$. Sólo la raíz 3 cumple que $|3| > 2$, con lo que la suma es $\frac{1}{3}$ sólo si $a = 3$.
48. $0.8414 \leq 0.841468254 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \leq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \approx 0.841666667 \leq 0.8417$.
 $\frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{10^5}$ si $2n+1 \geq 9$, así que según Leibniz $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}$ ya aproxima la suma con esa precisión.
49. a) El límite (puntual) de $f_n(x)$ es: $f(x) = 1$ si $|x| < 1$, $f(x) = \frac{1}{2}$ si $|x| = 1$, $f(x) = 0$ si $|x| > 1$.
 Las f_n continuas en $[0, 2]$ y f discontinua en $x = 1 \Rightarrow$ la convergencia no puede ser uniforme.
 b) $g_n(x) \rightarrow x \forall x \in \mathbf{R}$. $|\frac{nx}{n+1} - x| \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ si n grande, para todo $x \in [0, 1]$. Converge uniformemente.
 c) Converge puntualmente en todo \mathbf{R} a $h(x) = 0$. Converge uniformemente en $(-\infty, 0]$, pero no en $[0, \infty)$.
50. i) $f_n(0) = 0$, $f_n(x) > 0$ si $x > 0 \Rightarrow \forall \text{mín} = 0$. $f'_n(x) = (\frac{1}{n} - x)e^{-nx} \Rightarrow \forall \text{máx} = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{e^{-1}}{n^2}$.
 ii) $|f_n(x)| \leq \frac{e^{-1}}{n^2} \Rightarrow f_n \rightarrow 0$ uniformemente, y como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum f_n$ lo hace uniformemente.

51. a) $\left| \frac{\arctan(nx)}{5^n} \right| \leq \frac{\pi/2}{5^n} \forall x$ y $\sum \left(\frac{1}{5}\right)^n$ geométrica convergente $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ converge uniformemente en \mathbf{R} .

b) $\frac{|\cos^n x|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}, \forall x \in \mathbf{R}$ y $\sum \frac{1}{n^3}$ convergente \Rightarrow convergencia uniforme (y puntual) en \mathbf{R} (Weierstrass).

c) Si $x \neq 0$ converge, pues $\frac{x^2 + \arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}} n^{3/2} \rightarrow \frac{x^2 + \pi/2}{|x|} > 0$ y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Si $x = 0$, la serie diverge.

En $[1, 2]$ converge uniformemente (por Weierstrass) ya que $\left| \frac{x^2 + \arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}} \right| < \frac{4+\pi/2}{\sqrt{1+n^3}}$.

d) $\sum_1^\infty \frac{(5x)^{n-1}}{(x^2+6)^n} = \frac{1}{x^2+6} \sum_0^\infty \left(\frac{5x}{x^2+6}\right)^n$ geométrica; converge si $\left| \frac{5x}{x^2+6} \right| < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2) \cup (3, \infty)$.

En $[5, 6]$, $\left| \frac{5x}{x^2+6} \right| \leq \frac{30}{31} < 1$; como converge $\sum \left(\frac{30}{31}\right)^n$ la serie es uniformemente convergente (Weierstrass).

52. a) $R = \frac{1}{7}$; si $x = \frac{1}{7}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ diverge ($\sim \sum \frac{1}{n}$); si $x = -\frac{1}{7}$ converge (Leibniz).

b) $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = n \rightarrow \infty = R$. Convege $\forall x \in \mathbf{R}$.

c) $|\cos \frac{n\pi}{6}| |x|^n \leq |x|^n \Rightarrow$ si $|x| < 1$ converge. Si $|x| \geq 1$ el término general no tiende a 0.

d) $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 = R$. Sólo converge si $x = 2$.

e) $\frac{(|x|^n)^{1/n}}{(n+\log n)^{1/n}} \frac{|x|}{n^{1/n} (1+\frac{\log n}{n})^{1/n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$ [ó $\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \frac{n+\log n}{n+1+\log(n+1)} = |x| \frac{1+\frac{\log n}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{\log(n+1)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$]

Si $x = 1$: $\sum \frac{1}{n+\log n}$ diverge: $\frac{1/(n+\log n)}{1/n} = \frac{1}{1+\log n/n} \rightarrow 1$. Si $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n+\log n}$ converge por Leibniz:

f) $\frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{\pi^n}{\pi^{n+1}} \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} \rightarrow \frac{|x|^2}{\pi}$ (ó $\frac{n^{2/n}|x|^2}{\pi} \rightarrow \frac{|x|^2}{\pi}$) $\Rightarrow R = \sqrt{\pi}$. Diverge en $\pm\sqrt{\pi}$ ($\sum n^2$).

g) $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \rightarrow 1 = R$. Si $x = -1$ converge (Leibniz). Si $x = 1$ converge, pues $\frac{e^{-\sqrt{n}}}{1/n^2} \rightarrow 0$.

h) $\frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{|x-1|^{n+1}}{|x+1|^n} \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{(n+1)^3+1}} \rightarrow 2|x+1| \Rightarrow$ converge si $|x+1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ y diverge si $|x+1| > \frac{1}{2}$.

Si $x = -\frac{1}{2}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ converge. Si $x = -\frac{3}{2}$, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+1}}$ absolutamente convergente (o converge por Leibniz).

53. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^{n+1}|x|^{n+1}}{n3^n|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/3}3|x| = 3|x| \Rightarrow$ converge si $|x| < \frac{1}{3}$ y diverge si $|x| > \frac{1}{3}$. Si $x = \pm \frac{1}{3}$ diverge ($a_n \not\rightarrow 0$).

La serie es la derivada término a término de $\sum_{n=1}^\infty (3x)^n = \frac{3x}{1-3x}$, $|x| < \frac{1}{3}$. Su suma es $\frac{d}{dx} \frac{3x}{1-3x} = \frac{3}{(1-3x)^2}$, si $|x| < \frac{1}{3}$.

54. $\sum (-2x)^{3n} = \sum (-8x^3)^n$ es una serie geométrica, convergente si $|-8x^3| < 1$, es decir, si $|x| < \frac{1}{2}$.

Como $\arctan \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{9}{125} + \dots > \frac{66}{125} > \frac{1}{2}$ (ó $\arctan \frac{3}{5} > \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$) para ese valor diverge.

55. Diverge para $x \neq 1$ [$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x \cos \frac{1}{n}) \neq 0$]. Convege para $x = 1$ [$\frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{1/n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$].

56. a) $|R_{2n}(1)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} \cdot n = 3$: $\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} \approx 0.540$.

b) $|R_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!}$. $n = 6$: $e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2.718$.

c) $|R_n(\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}}$. $n = 7$: $\log(1 + \frac{1}{2}) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} \approx 0.406$.

d) $|R_n(\frac{1}{3})| \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{3^{n+1}}$. $n = 4$: $\log(1 + \frac{1}{3}) \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} - \frac{1}{324} \approx 0.287$.

e) $|R_n(1)| \leq \frac{1}{n+1}$. $n = 999$. Mucho más corto utilizando que $\log 2 = \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} \approx 0.694$.

57. $x(1+x^3)^{-1/5} = x[1 + (-\frac{1}{5})x^3 + \dots] = x - \frac{1}{5}x^4 + \frac{3}{25}x^7 + \dots$, si $|x^3| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$.

$f(\frac{1}{2}) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \frac{1}{16} = \frac{39}{80}$, con error menor que (serie alternada decreciente): $\frac{3}{25 \times 2^7} = \frac{3}{3200} < 10^{-3}$.

58. a) $\cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} [1 + \cos \frac{2x}{3}] = 1 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{243}x^4 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{3^{2n}(2n)!} x^{2n}, \forall x.$
 b) $\frac{5}{3-x} = \frac{5}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{5}{3} [1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \dots] = \frac{5}{3} + \frac{5}{9}x + \frac{5}{27}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^{n+1}} x^n, \text{ si } |x| < 3.$
 c) $\sin x - x \cos x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{840}x^7 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \forall x.$
 d) $(2-x)\sqrt{1+x} = 2 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \dots, \text{ si } |x| < 1.$ e) $\operatorname{sh}x \operatorname{ch}x = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots, \forall x.$
 f) $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \dots.$ g) $\frac{\log(1+2x)}{1+2x} = 2x - 6x^2 + \frac{44}{3}x^3 + \dots.$ h) $\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \dots.$

59. $[1+x]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots, |x| < 1 \rightarrow [1-x^2]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \dots, |x| < 1.$
 $\frac{d}{dx} [\operatorname{arc} \sin x] = [1-x^2]^{-1/2} \text{ y } \operatorname{arc} \sin 0 = 0 \Rightarrow \operatorname{arc} \sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots, |x| < 1.$

60. a) $\operatorname{ch} 1.$ b) $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2.$ c) $3 \log \frac{3}{2}.$ d) $2\sqrt{e}.$ e) $\frac{3}{4}.$

61. $\sqrt{1-x^4} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^7).$ $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4$ es el único polinomio de grado menor que 8 que lo verifica (cualquier $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + a_8x^8 + a_9x^9 + \dots + a_nx^n$ también lo hace).

62. a) $\frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}.$ b) $\frac{x - \tan x}{\arctan x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}.$ c) $\frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}.$ d) $e^{3 \log(\cos 2x)/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^{-6}.$ e) $\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$
 f) $\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}.$ g) $\frac{x^x - x}{1-x+\log x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -2.$ h) $\frac{1}{1+\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}.$ i) $\frac{x \log x}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$ j) $e^{\log(\log x)/x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$
 k) $\frac{1+e^{-x} \operatorname{sen} x}{1+e^{-x} \cos x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$ l) $e^{x \log(1+\frac{6}{x^3})} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^6.$ m) $x[x \arctan \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+x}}{x}] \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty.$ n) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1.$

63. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ si $b < 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ si $b^2 = 4 \Rightarrow b = -2.$

64. a) $\operatorname{sen}^2 x = [x - \frac{x^3}{6} + \dots]^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \dots, \log(1+x^4) = x^4 + \dots \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + \dots}{x^4 + \dots} = \frac{1}{3}.$
 aii) y aiii): Por ser $\operatorname{sen}^2 x$ acotado: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{\log(1+x^4)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x}{4x^3/(1+x^4)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1+x^4}{2x^2} = \infty.$

- b) $\frac{x^3 + o(x^3)}{1 - (1 - x^3 + o(x^3))} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ ó $\frac{3 \cos x \operatorname{sen}^2 x}{3e^{-x^3} x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$ bii) $\lim = 0$ (numerador acotado y denominador $\rightarrow \infty$).

- biii) No existe: las sucesiones $a_n = n\pi, b_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} \rightarrow \infty$, pero $g(a_n) \rightarrow 0$, mientras que $g(b_n) \rightarrow 1.$

- ci) $\arctan(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \dots = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow \frac{x - \frac{x^3}{2} - x + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}.$

- cii) h no está definida. ciii) $\frac{\arctan(\operatorname{sen} x)}{\log(1+x^3)} \rightarrow 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^2/(1+x^3)} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty.$

65. Si $x \neq n \in \mathbf{Z}, f$ claramente continua. Si $x = 2n+1$ continua: $f(x) \rightarrow 0 = f(2n+1)$ cuando $x \rightarrow 2n+1.$

- Si $x = 2n \neq 0$ discontinua: $|\frac{2x \operatorname{sen} \pi x + \pi x^2 \cos \pi x}{\pi \operatorname{sen} \pi x}| \xrightarrow{x \rightarrow 2n} \infty. \frac{(2-\pi^2 x^2) \operatorname{sen} \pi x + 4x\pi \cos \pi x}{\pi^2 \cos \pi x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \text{ continua en } x=0.$

66. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^6 + \dots, \text{ si } |x| < 1 \Rightarrow f'(0) = 0, f''(0) = 2.$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt[3]{2}. f(x) \rightarrow \infty \text{ si } x \rightarrow -1^\pm.$

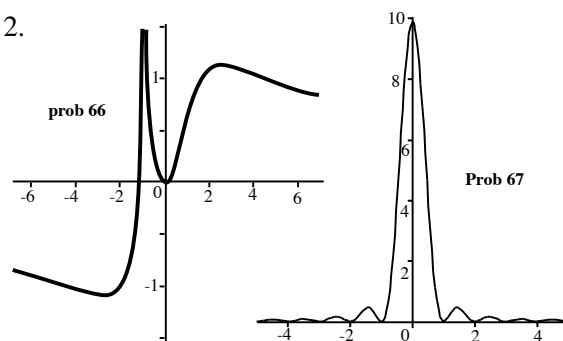
$f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{matrix} f(n) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \pm \infty \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(f(n)) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f \text{ continua en } 0 \\ n \rightarrow \infty \end{matrix}$

67. $f(x) = \pi^2 - \frac{1}{3}\pi^4 x^2 + \dots \Rightarrow f'(0) = 0, f''(0) = -\frac{2}{3}\pi^4.$

$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}. f(n) = f'(n) = 0, n \in \mathbf{N}, \text{ mínimos.}$

$f'(\frac{1}{2}) = -16 \neq 0 \Rightarrow \text{existe } f^{-1} \text{ en un entorno y}$

$(f^{-1})'(f(\frac{1}{2})) = -\frac{1}{16}.$



68. Continua en $\mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$. En $x = -1$ discontinua ($f(x) \rightarrow -\infty$).

$$\text{En } x = 0, 1 \text{ continua: } \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) \frac{-x^2 + o(x^2)}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log|1-x^2|}{x/(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1-x^2} (x-1)^2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(1-x)}{1+x} = 0.$$

$$\text{Es derivable en } x = 0: f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} (h-1) \frac{\log(1-h^2)}{h^2} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + o(h^2)}{h^2} = 1.$$

f continua en $[0, 1]$, derivable en $(0, 1)$ y $f(0) = f(1) \Rightarrow$ existe c , $0 < c < 1$, con $f'(c) = 0$ (Rolle).

69. $f'(0) = -\frac{1}{2}$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} = 0$, $f > 0 \forall x$ y f continua $\forall x \Rightarrow$ imagen = $(0, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x^2} = \frac{x+1-e^x}{x^2 e^x} < 0 \quad \forall x \Rightarrow f \text{ decreciente en todo } \mathbf{R}, \text{ pues } g(x) = x+1-e^x < 0 \quad \forall x$$

$(g(0) = 0, g'(x) = 1 - e^x$ positivo si $x < 0$ y negativo si $x > 0 \Rightarrow g$ negativa si $x < 0$ y si $x > 0$).

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n + \dots \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{n!(-1)^n}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(n+1)}. \text{ En particular, } f^{(2003)}(0) = -\frac{1}{2004}.$$

Soluciones a los problemas 70-100 de Cálculo I (2006-2007).

70. f continua a trozos. F continua en $[0, 3]$ y derivable salvo en $x = 2$. $F(3) = \log 4$.

71. $F(1) = \int_{-1}^1 te^{-t^4} dt = 0$ (integrando impar). $F'(x) = xe^{-x^4} + 2(1-2x)e^{-(1-2x)^4} \Rightarrow F'(1) = -e^{-1}$.

Por la regla de la cadena: $(F \circ F)'(1) = F'(F(1))F'(1) = F'(0)F'(1) = (2e^{-1})(-e^{-1}) = -2e^{-2}$.

$F(0) = \int_1^0 te^{-t^4} dt = -\int_0^1 te^{-t^4} dt < 0$ [integrando positivo en $(0, 1)$] $\Rightarrow F(0) < F(1)$.

72. $\int_{-1}^1 f(x)dx = [\log | \int_{-1}^x \sin(t^3)dt + x + 4 |]_{-1}^1 = \log \frac{5}{3}$, pues $\int_{-1}^1 \sin(t^3)dt = 0$ (integrando impar).

73. a) F crece en $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ y decrece en $[\frac{1}{\sqrt{3}}, 2]$, $F(0) = 0$, $F(2) < 0$. Máximo en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; mínimo en $x = 2$.

b) G crece en $[-1, 3]$ y decrece en $[3, 6]$, $K(-1) < 0$, $K(6) > 0$. Máximo en $x = 3$; mínimo en $x = -1$.

c) $H'(x) = 1 - \cos(\sin x) \geq 0$. Se anula si $x = \pi$. H creciente en $[1, 4] \Rightarrow$ mínimo en $x = 1$, máximo en $x = 4$.

74. $f'(x) = 2xe^{x^4}(1-2x^2) \Rightarrow f(x)$ crece en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ y decrece en $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$. $f(0) = -1$.

e^t crece si $t > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{\sqrt{2}}) < \int_0^{1/\sqrt{2}} e^{1/4} dt - e^{1/4} = -\frac{e^{1/4}}{2} < 0$ (valor máximo). $f(x)$ no se anula en $[0, \infty)$.

75. $f'(x) = \frac{x(x-1)}{\log x} > 0 \Rightarrow f$ estrictamente creciente $\Rightarrow f$ admite inversa, para $x \geq 2$.

76. $f'(x) = e^{4\arctan x} \forall x$ (TFC). Como $f(1) = \int_1^1 = 0$, $f'(1) = e^\pi$, la recta tangente es: $y = e^\pi(x-1)$.

$f'(x) > 0 \forall x \Rightarrow f$ estrictamente creciente en todo \mathbf{R} y existe f^{-1} . $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = e^{-\pi}$.

77. $F'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{-1/x^8} - \frac{1}{x^2}e^{-1/x^4} \Rightarrow F'(1) = -\frac{3}{e}$. $\sum (-1)^n F(n)$ es alternada, pues $F(n) > 0$ (integrando positivo y $\frac{1}{n^2} > -\frac{1}{n}$), $F(n)$ es decreciente ($F'(x) < 0$ si $x > 0$) y $F(n) \rightarrow 0$. Por Leibniz, converge.

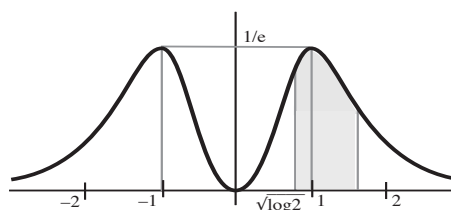
78. $H'(x) = 8x^2e^{-4x^2} - x^2e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\log 2}$.

H crece en $[-\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2}]$ y decrece en el resto de \mathbf{R} .

En $x = \sqrt{\log 2}$ hay un máximo local (y absoluto).

El valor máximo de f (en $x = \pm 1$) es $1/e$. El de H :

$$H(\sqrt{\log 2}) = \int_{\sqrt{\log 2}}^{2\sqrt{\log 2}} t^2 e^{-t^2} dt \leq \int_{\sqrt{\log 2}}^{2\sqrt{\log 2}} \frac{1}{e} dt = \frac{1}{e} \sqrt{\log 2} < \frac{1}{2}$$



79. Valor máximo $g(3) = 1$; valor mínimo $g(4) = \frac{4}{5}$. $\int_2^4 g = 14 - 36 \log \frac{7}{5} = 14 - \frac{72}{5} + \frac{72}{25} - \frac{96}{125} + \frac{144}{625} - \dots \approx 1.887$.

80. a) $\frac{1}{3}(\log x)^3$. b) $-\frac{1}{x}(1 + \log x)$. c) $\frac{1}{3}x^3 \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6} \log(1+x^2)$.

d) $x[(\log x)^3 - 3(\log x)^2 + 6 \log x - 6]$. e) $x \arcsen x + \sqrt{1-x^2}$. f) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \log|1+x|$.

g) $\frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8} \log |\frac{x-2}{x}|$. h) $\log|x^3+2x^2+2x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. i) $\frac{1}{3} \log|x-2| - \frac{1}{6} \log(x^2+2x+4)$.

j) $2 \sin x^2$. k) $x \tan x + \log(\cos x)$. l) $\frac{5}{8} \log(5+4 \cos x) - \frac{1}{2} \cos x$. m) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x)$.

n) $\tan x - x$. ñ) $x^2 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$. o) $\frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1)$. p) $x - \log(1 + e^x) + \frac{1}{1+e^x}$.

q) $\frac{1}{15} \sqrt{1-x^2}(3x^4 - x^2 - 2)$. r) $2\sqrt{1+x} + \log |\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}|$. s) $-\frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-1}$.

81. a) $2(1 - e^{-1})$. b) No existe ni como impropia. c) $-\frac{2}{3} \log 2$. d) 0.

e) 0. f) $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$. g) $\frac{1}{15}(112 - 4\sqrt{2})$. h) $\frac{\pi}{2} - 1$.

i) $\frac{1}{3}$. j) $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$. k) $2(1 - \log 2)$. l) $\frac{1}{5} \log \frac{3}{8}$.

82. Primitiva: $\frac{x^2}{2} \log(1 + \frac{4}{x^2}) + 2 \log(x^2 + 4)$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+4t^2)}{t^2} = 4 \Rightarrow$ la impropia diverge.
83. $\int_3^\infty \frac{1}{x^3} e^{-6/x} dx \leq \int_3^\infty \frac{1}{x^3} = \frac{1}{18}$ (haciendo $u = 1/x$ se puede hallar el valor exacto: $\frac{1}{36} - \frac{1}{12e^2}$).
84. a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2} dx$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(x^4+x^2)}{1/x^2} = 1$: diverge en 0, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/(x^4+x^2)}{1/x^4} = 1$ converge en ∞ ; diverge.
- b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_{-\infty}^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^{\infty} = \pi$.
- c) $\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$; $|e^{-x} \sin x| \leq e^{-x}$; absolutamente convergente ($= -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) \Big|_0^\infty = \frac{1}{2}$).
- d) $\int_0^\infty \frac{1}{x^{1+1/x}} dx$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-(1+1/x)}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\log x/x} = 1$; divergente.
- e) $\int_1^\infty (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}) dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$ es convergente ($\dots = \log \frac{1+\sqrt{2}}{2}$).
- f) $\int_1^\infty e^{-1/x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-1/x} = 1$; divergente.
- g) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx = \pi$; convergente. h) $\int_1^\infty (\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}) dx = 4\sqrt{x} - \log x \Big|_1^\infty$; divergente.
- i) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x/x^{3/2}}{1/x^{1/2}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x/x^{3/2}}{1/x^{3/2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ converge ($\dots = \sqrt{2}\pi$).
- j) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} dx$, $|\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$: converge en 0.
- k) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^3} dx$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{\log x}{x^3} = 0$: converge ($-\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} \Big|_1^\infty = \frac{1}{4}$).
- l) \int_2^∞ converge: $\frac{1/\sqrt[3]{x^4-1}}{1/x^{4/3}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$. \int_1^2 también converge: $\frac{1/\sqrt[3]{x^4-1}}{1/\sqrt[3]{x-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)(x^2+1)}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > 0$.
- m) $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^{3/2}} dx$; $\frac{\log(1+x)/x^{3/2}}{1/x^{1/2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, $\frac{\log(1+x)/x^{3/2}}{1/x^{5/4}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$ converge ($4 \arctan \sqrt{x} - \frac{2 \log(1+x)}{\sqrt{x}} \Big|_0^\infty = 2\pi$).
- n) $\int_1^\infty (1 - \cos \frac{2}{x}) dx$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{2}{x}}{1/x^2} = 2$: converge.
- ñ) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = 1$: divergente (o a partir de la primitiva $-\frac{1}{\sin x} - \sin x$).
- o) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}/(x-1)^{1/3}}{e^{-x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x}/(x-1)^{1/3}}{1/(x-1)^{1/3}} = e^{-1}$: converge en 1 e ∞ .
- p) $\int_1^\infty \log x \sin \frac{1}{x^2} dx$ converge: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x \sin x^{-2}}{x^{-3/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^{1/2}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin t^2}{t^2} = 0$.
- q) $\int_0^1 \log x dx = x \log x - x \Big|_0^1 = -1$: converge.
- r) $\int_4^\infty \frac{\arctan \frac{1}{x}}{(2x-8)^{1/3}} dx$ converge: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^{1/3} \arctan \frac{1}{x}}{(2x-8)^{1/3}} = \frac{\arctan \frac{1}{4}}{2^{1/3}} > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{4/3} \arctan \frac{1}{x}}{(2x-8)^{1/3}} = \frac{1}{2^{1/3}} > 0$.
- s) $\int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{x}}{e^{x^2-1}} dx$ diverge. $\sin \sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{6} + \dots$, $e^{x^2} - 1 = x^2 + \dots \Rightarrow \frac{\sin \sqrt{x}/(e^{x^2}-1)}{1/x^{3/2}} = \frac{x^2 \dots}{x^2 \dots} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 \Rightarrow \int_0^1$ diverge.
 $\left| \frac{\sin \sqrt{x}}{e^{x^2}-1} \right| \leq \frac{1}{e^{x^2}-1}$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge y $\frac{1/(e^{x^2}-1)}{1/x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \int_1^\infty$ converge (absolutamente).
85. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{n}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = n - 1 \Rightarrow$ diverge para $n \neq 1$. Si $n = 1$ tiene límite en $x = 0$.
- b) En ∞ diverge si $n \leq 2$. Si $n = 3$, en $x = 2$ se comporta como la divergente $\int_2^+ \frac{dx}{x-2}$.
Si $n \geq 4$, el denominador no tiene raíces en $[2, \infty)$. La integral converge si $n \geq 4$.
86. i) En 0^+ se comporta como $\frac{1}{x^{a-1}}$ y en ∞ como $\frac{1}{x^a}$. Converge si $1 < a < 2$.
- ii) En 0^+ no hay problemas ($\arctan(x + \frac{1}{x}) \rightarrow \frac{\pi}{2}$). En ∞ converge para $a > \frac{1}{2}$, comparando con $\frac{1}{x^{2a}}$.
- iii) En 0^+ se comporta como x^a y en ∞ como x^{3a} . Converge para $-1 < a < -1/3$.

87. a) $x \int_0^x e^{-t^2} dt = x(x - \frac{1}{3}x^3 + \dots) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \dots) - (x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \dots)}{x^4 - \frac{1}{2}x^8 + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + \dots}{x^4 + \dots} = -\frac{1}{3}.$

b) Sea $G(x) = \int_{-x^2}^0 \sin t^2 dt$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x)}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^4}{6x^5} = \frac{1}{3}$; $-x^2 \leq G(x) \leq x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x^6} = 0.$

88. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{-1/2}}{(\log t + t)^{-1/2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{\log t}{t}} = 1$ e $\int_2^\infty \frac{dt}{\sqrt{\log t + t}}$ divergente \Rightarrow la impropia $\int_2^\infty \frac{dt}{\sqrt{\log t + t}}$ diverge.

Como $F(x), F(2x) \rightarrow \infty$, por L'Hôpital y TFC: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(2x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2F'(2x)}{F'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/\sqrt{\log 2x + 2x}}{1/\sqrt{\log x + x}} = \sqrt{2}.$

89. $H(0) = \int_{-1}^0 [t^3 - \frac{1}{6}t^9 + \frac{1}{120}t^{15} + \dots] dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{60} - \frac{1}{1920} + \dots \Rightarrow H(0) \approx -\frac{7}{30}.$

$H'(1^-) = -\int_{-1}^1 \sin t^3 dt = 0 = \int_{-1}^1 \sin t^3 dt = H'(1^+)$; derivable y $H'(1) = 0.$

90. $\frac{x^3 + x^2 - 7}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = 1 + \frac{3x^2 - x - 5}{(x-2)(x^2+1)} = 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{2x+3}{x^2+1}$. $G(x) = x + \log|x-2| + \log(x^2+1) + 3 \arctan x - 1 - \log 2.$

En $[0, 1]$ es $g(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - x - 5}{(x-2)(x^2+1)} > 0$, pues el denominador es negativo y $3x^2 - x - 5 \leq 3 - 0 - 5 < 0$.

$G' = g > 0$, G continua en $[0, 1]$, $G(0) = -1 < 0$, $G(1) = \frac{3\pi}{4} > 0 \Rightarrow \exists$ único $c \in (0, 1)$ con $G(c) = 0.$

$\int_{2^+}^3 \sqrt{g(x)} dx = \int_{2^+}^3 \sqrt{\frac{x^3 + x^2 - 7}{x^2 + 1}} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ converge pues $\int_{2^+}^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ converge y $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{g(x)}}{1/\sqrt{x-2}} = 1.$

91. $F'(x) = xe^{x^3} \Rightarrow F$ decrece en $[-1, 0]$, crece en $[0, \infty) \Rightarrow$ el valor mínimo es $F(0).$

[Bastaría decir: hasta $x=0$ vamos añadiendo áreas negativas y luego positivas].

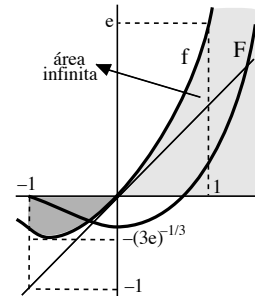
Además $F \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, pues $f > 0$ en $[0, \infty)$ y claramente $\int_0^\infty f$ diverge, por tender $f \rightarrow \infty$ (o porque si $t > 0$, $te^{t^3} > t$ e $\int^\infty t dt$ diverge). El valor máximo de F no existe.

En $[-1, 0]$ es $e^{t^3} \leq 1$, $t \leq 0 \Rightarrow te^{t^3} \geq t \Rightarrow F(0) = \int_{-1}^0 te^{t^3} dt > \int_{-1}^0 t dt = -\frac{1}{2}.$

$f'(t) = (1+3t^3)e^{t^3} \Rightarrow$ mínimo de f en $t = -3^{-1/3} \Rightarrow f(t) \geq -(3e)^{-1/3}$ en $[-1, 0] \Rightarrow$

$F(0) > \int_{-1}^0 -(3e)^{-1/3} dt = -(3e)^{-1/3} > -\frac{1}{2}$ [pues $(3e)^{-1/3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow e > \frac{8}{3} = 2,66\dots$].

O Taylor: $F(0) = \int_{-1}^0 [t + t^4 + \frac{t^7}{2} + \frac{t^{10}}{6} + \dots] dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{16} + \frac{1}{66} + \dots$ (serie de Leibniz) $\Rightarrow F(0) > -\frac{1}{2}.$



92. i) $\int_0^{1/2} \sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^{1/2} (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^\infty (\frac{1}{2})^{n+1} = 1$ ($\sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$).

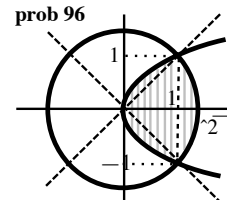
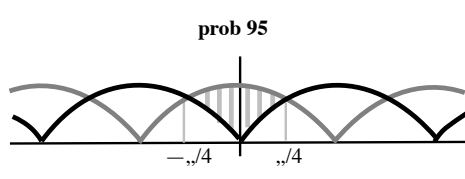
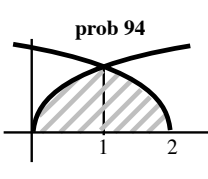
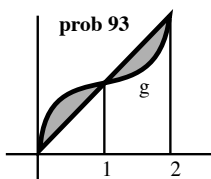
ii) $\int_0^\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n^2} dx = 0.$ iii) $\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+x)^2} dx = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}) = \frac{1}{3}.$

93. $\int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx = \frac{1}{2}.$

94. $\int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 \sqrt{2-x} dx = \frac{4}{3}.$ (O bien $\int_0^1 [(2-y^2) - y^2] dy = \frac{4}{3}$).

95. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [|\cos x| - |\sin x|] dx = 2(\int_0^{\pi/4} [\cos x - \sin x] dx) = 2(\sqrt{2} - 1).$

96. Las curvas se cortan en $(1, \pm 1)$. área = $\frac{1}{4}$ área del círculo + $2 \int_0^1 (y - y^2) dy = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$



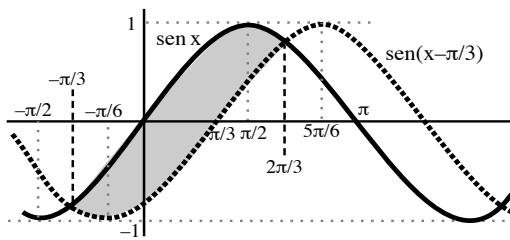
97. Puntos de corte entre $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{3})$:

$$\text{sen } x - \text{sen}(x - \frac{\pi}{3}) = 2 \text{sen } \frac{\pi}{6} \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 0, x = -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \text{ ó}$$

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \text{sen } x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x, \tan x = -\sqrt{3}, x = -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Área} = \int_{-\pi/3}^{2\pi/3} \cos(x - \frac{\pi}{6}) dx = [\text{sen}(x - \frac{\pi}{6})]_{-\pi/3}^{2\pi/3} = 2. \text{ O bien:}$$

$$\int_{-\pi/3}^{2\pi/3} [\text{sen } x - \text{sen}(x - \frac{\pi}{3})] dx = [\cos(x - \frac{\pi}{3}) - \cos x]_{-\pi/3}^{2\pi/3} = 2.$$

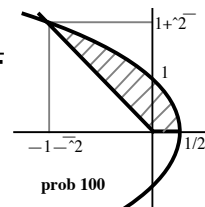
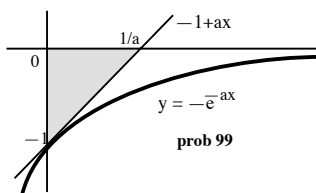


98. $y = k(x - 1) + 2$, $A(k) = \frac{1}{6}(k^2 - 4k + 8)^{3/2}$, $A' = 0 \Rightarrow k = 2$.

99. La recta tangente es: $y = -1 + ax$, que corta $y = 0$

en $x = \frac{1}{a}$, definiendo un triángulo de área $\frac{1}{2a}$.

El área de la región limitada por la curva (impropia convergente) es el doble: $-\int_0^{\infty} (-e^{-ax}) dx = \frac{1}{a}$.



100. $\frac{1}{2} \int_0^{3\pi/4} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \int_{-1-\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-2x} dx - \int_{-1-\sqrt{2}}^0 (-x) dx = \int_0^{1+\sqrt{2}} (\frac{1-y^2}{2} + y) dy = \frac{1}{6}(5 + 4\sqrt{2})$.