6. Introducción al cálculo en $\mathbf{C}$

6.1. Funciones de variable compleja

Veamos algunas propiedades del conjunto de los números complejos $\mathbf{C}=\{z=a+\mathrm{i}b : a,b\in\mathbf{R}\}$. No hay ningún número real x tal que $x^2+1=0$. Para que esa ecuación tenga solución es necesario introducir el número imaginario i: $\mathrm{i}^2=-1$. En $\mathbf{C}$ están definidas las operaciones suma y producto:

$$(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)=(a+c)+\mathrm{i}(b+d)\ ,\ (a+\mathrm{i}b)\cdot(c+\mathrm{i}d)=(ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc)$$

Con estas dos operaciones $\mathbf{C}$ es un **cuerpo**: $+$ y $\cdot$ son asociativas y conmutativas, existe la distributiva, existen elementos neutros ($z+0=z$ y $z\cdot 1=z$) e inversos:

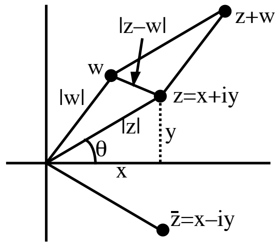
$$\forall z=a+\mathrm{i}b\ \exists -z=-a-\mathrm{i}b \text{ tal que } z+(-z)=0$$
$$\forall z\neq 0\ \exists z^{-1}=\tfrac{a}{a^2+b^2}-\mathrm{i}\tfrac{b}{a^2+b^2} \text{ tal que } z\cdot z^{-1}=1$$

Se define diferencia y cociente de complejos como: $z-w=z+(-w)$, $\frac{z}{w}=z\cdot w^{-1}$ si $w\neq 0$.

[No se puede, a diferencia de $\mathbf{R}$, definir un orden en $\mathbf{C}$ compatible con las operaciones anteriores].

Dado $z=x+\mathrm{i}y$, el **conjugado** de z es $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$; y el **módulo** de z es $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Representando cada número complejo $z=x+\mathrm{i}y$ como el punto del plano de coordenadas (x,y), es fácil ver que el complejo suma $z+w$ está en el vértice opuesto al origen de un paralelogramo dos de cuyos lados son los segmentos que unen z y w con $O=(0,0)$. El conjugado de z es la reflexión de z respecto de $y=0$. El módulo es la distancia desde z al origen. La distancia de z a w viene dada por $|z-w|$.



Algunas propiedades de demostración inmediata son:

$$\overline{\overline{z}}=z,\ \overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\ \overline{-z}=-\overline{z},\ \overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w},\ \overline{z^{-1}}=(\overline{z})^{-1},\ |z|^2=z\cdot\overline{z},\ |z\cdot w|=|z|\cdot|w|$$

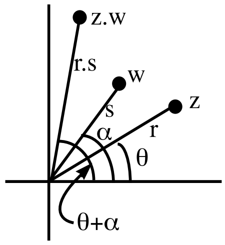
Más difícil es probar (ver Spivak) que $|z+w|\leq|z|+|w|$ (el significado geométrico es claro).

Un z se puede describir con coordenadas **polares**: $z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)$, donde $r=|z|$ y θ es el ángulo que forma el segmento Oz con el eje x positivo. El θ no es único: todos los $\theta+2k\pi$ nos dan el mismo z. Cualquiera de ellos se llama **argumento** de z. El **argumento principal** es el θ con $0\leq\theta<2\pi$. El θ se halla utilizando que $\tan\theta=\frac{y}{x}$ y mirando el cuadrante en que está el z.

Ej. Para $z=-2+2\mathrm{i}$ es $|z|=2\sqrt{2}$; como $\tan\theta=-1$ y z está en el tercer cuadrante, se puede escribir z (con el argumento principal) en la forma $z=2\sqrt{2}\,[\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}]$ (ó con otro θ: $z=2\sqrt{2}\,[\cos\frac{11\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{11\pi}{4}]$).

Más adelante veremos que si θ es cualquier real: $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$ (complejo de módulo 1). Esto nos proporciona una forma más corta de expresar un complejo en polares:

$z=re^{\mathrm{i}\theta}$, donde $r=|z|$ y θ es un argumento de z.



Las formas polares son muy útiles para efectuar productos y potencias:

Si $z=re^{\mathrm{i}\theta}$, $w=se^{\mathrm{i}\alpha}$ entonces:

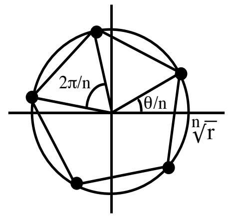
$$z\cdot w=rs\,e^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)}=rs\,[\cos(\theta+\alpha)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta+\alpha)]\,,$$
$$\frac{z}{w}=\frac{r}{s}e^{\mathrm{i}(\theta-\alpha)}=\frac{r}{s}[\cos(\theta-\alpha)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta-\alpha)]\,,$$
$$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\operatorname{sen}n\theta)\,.$$

[Las dos primeras son inmediatas y la del z^n se prueba por inducción].

Todo $z = re^{i\theta} \neq 0$ tiene exactamente n raíces n-simas distintas dadas por

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\phi} = \sqrt[n]{r}(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi) \text{ con } \phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}\,,\ k = 0,\dots,n{-}1\,.$$

[basta elevar a n y observar que si $k = n, n{+}1, \dots$ se repiten los ángulos de antes; vemos que las n raíces están en los vértices de un polígono regular].



Hagamos una serie de operaciones de repaso de la aritmética compleja:

Ej. Calcular $\left|\frac{i(3-4i)}{2+i}\right|$. Basta hacer uso de las propiedades del módulo: $|\,| = \frac{|i||3-4i|}{|2+i|} = \frac{1\cdot 5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

[Vamos ahora a hacerlo dando un rodeo calculando el complejo que está dentro del módulo:

$$\frac{i[3+4i]}{2+i} = \frac{[3i-4][2-i]}{[2+i][2-i]} = \frac{3-8+6i+4i}{5} = -1+2i, \text{ cuyo módulo es, desde luego, } \sqrt{5}\ ]$$

Ej. Calcular $w = (1-i)^6$, directamente y en polares:

$$w = 1+6(-i)+15(-i)^2+20(-i)^3+15(-i)^4+6(-i)^5+(-i)^6 = 1-6i-15+20i+15-6i-1 = 8i$$

$$r = \sqrt{2}\,,\ \tan\theta = -1 \to \theta = \tfrac{7\pi}{4}\ (\theta \text{ del cuarto cuadrante}) \to \left(\sqrt{2}\,e^{i\,7\pi/4}\right)^6 = 8e^{i\,21\pi/2} = 8e^{i\,\pi/2} = 8i$$

Ej. Hallar las raíces cúbicas de $z = \frac{7+i}{1-i}$.

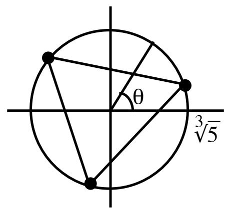
Podemos hacer: $z = \frac{[7+i][1+i]}{[1-i][1+i]} = \frac{6+8i}{2} = 3+4i = 5e^{i\arctan(4/3)}$. O bien,

$7+i = 5\sqrt{2}\,e^{i\arctan(1/7)}$, $1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\,7\pi/4} \to z = 5e^{i\,[\arctan(1/7)+\pi/4]}$

[las dos expresiones de z coinciden, pues $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$]

Por tanto, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{5}\,e^{i\phi}$ donde $\phi = \frac{\arctan(4/3)+2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$. Con calculadora:

$\theta = \arctan\frac{4}{3} \approx 0.927$; $\phi \approx 0.309, 2.403, 4.498 \to z \approx 1.63{+}0.52\,i,\ -1.26{+}1.15\,i,\ -0.36{-}1.67\,i$



Ej. Factorizar el polinomio real x^4+1 (lo habíamos necesitado para hallar una primitiva de 5.5).

Las raíces del polinomio son las 4 raíces de $-1 = 1e^{i\pi}$ que son $\sqrt[4]{1}\,e^{i\phi}$ con $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Es decir, $z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 \pm i]$, $z_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}[-1 \pm i]$, complejos conjugados dos a dos, como debían

(a las mismas raíces llegaríamos buscando los z tales que $z^2 = \pm i$, pero sería mucho más largo).

Por tanto: $x^4+1 = [(x-z_1)(x-z_2)][(x-z_3)(x-z_4)] = [x^2-(z_1+z_2)x+z_1z_2][x^2-(z_3+z_4)x+z_3z_4]$

$$\to x^4+1 = [x^2-\sqrt{2}x+1][x^2+\sqrt{2}x+1]$$

Ej. Hallar las raíces de la ecuación $z^2 - iz - 1 - i = 0$. La fórmula $z = \frac{1}{2a}[-b \pm \sqrt{b^2-4ac}]$ sigue siendo válida interpretando $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ como las dos raíces del complejo (no tiene sentido decir 'la raíz positiva' de un complejo). En nuestro caso: $z = \frac{1}{2}[i \pm \sqrt{3+4i}]$. Trabajemos en cartesianas: buscamos $z = x+iy$ tal que sea $z^2 = x^2-y^2+2xyi = 3+4i$. Debe ser $x^2-y^2 = 3$ y $2xy = 4$. Hay dos soluciones reales de este sistema: $x = 2, y = 1$ y $x = -2, y = -1$. [En polares obtendríamos $\sqrt{5}\,e^{i\phi}$, $\phi = \frac{\arctan(4/3)}{2} + k\pi$, $k = 0,1$, que deben coincidir con $\pm(2+i)$]. Las raíces buscadas son:

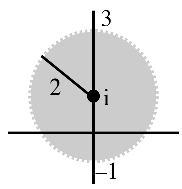
$$z = \tfrac{1}{2}[i+(2+i)] = 1+i \quad \text{y} \quad z = \tfrac{1}{2}[i-(2+i)] = -1\,.$$

Ej. Representar en el plano complejo los z que cumplen $|z-i| < 2$.

Si $z = x+iy$, esto equivale a $|x+i(y-1)| < 2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 < 4$.

Los z buscados son los del círculo sin borde de centro $(0,1)$ y radio 2

(claro, los z que distan del complejo i menos que 2).



Ej. Expresar $\cos 3\theta$ y $\mathrm{sen}\,3\theta$ en términos de $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ utilizando potencias de complejos.

$$\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta = e^{i3\theta} = [e^{i\theta}]^3 = [\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta]^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + i[3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta]$$

$$\Rightarrow \quad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\,3\theta = 3\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\,\mathrm{sen}^3\theta$$

[sale usando sólo propiedades reales de senos y cosenos de sumas, pero es bastante más largo]

Pasemos ya a tratar las **funciones de variable compleja**. Una función $f(z)$ de variable compleja será una regla que asigna a cada complejo z de un dominio un único complejo $f(z)$.

Como los reales son un tipo particular de números complejos podríamos hablar también de funciones reales de variable compleja, si $f(z)$ es real para cada z, o de funciones complejas de variable real (incluso las funciones reales de variable real vistas hasta ahora se pueden mirar como un tipo particular de funciones complejas).

Ej. $f(z)=z^2$, $f(z)=\bar{z}$, $f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=xy+\mathrm{i}x$ son funciones complejas de variable compleja.

Una función compleja de variable real es, por ejemplo, $f(x)=\operatorname{sen}x+\mathrm{i}\operatorname{th}x$, si $x\in\mathbf{R}$.

Funciones (importantes) reales de variable compleja son:

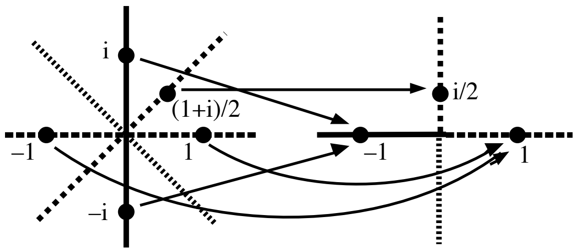
$f(z)=|z|$ (función 'módulo'), $\operatorname{Arg}(z)=\theta$, con θ argumento principal de z (función 'argumento'),

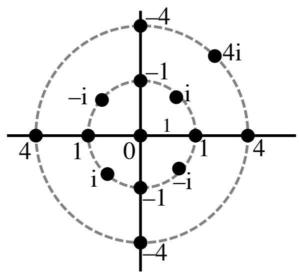
$\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Re}(x+\mathrm{i}y)=x$, $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(x+\mathrm{i}y)=y$ (funciones 'parte real' y 'parte imaginaria').

Cualquier función f de valores complejos puede escribirse en la forma $f=u+\mathrm{i}v$, donde u y v (parte real y parte imaginaria de f) son funciones con valores reales (esto no siempre será útil). Por ejemplo, así podemos expresar:

$$f(z)=z^2=(x^2-y^2)+\mathrm{i}\,(2xy) \ , \ f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}y$$

Pintar funciones complejas es mucho más difícil que las reales. Podríamos dibujar flechas entre dos planos complejos, o bien escribir el valor de $f(z)$ sobre cada z de un plano complejo. Las dos cosas están hechas abajo para $f(z)=z^2$:



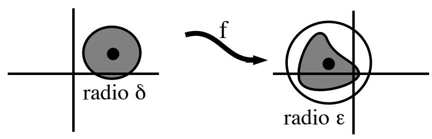


Las definiciones de límites y continuidad son las de $\mathbf{R}$ sustituyendo valores absolutos por módulos:

Def. ($\varepsilon,\delta\in\mathbf{R}$; $z,a,L\in\mathbf{C}$)

$\lim\limits_{z\to a} f(z)=L$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si z cumple $0<\lvert z-a\rvert<\delta$ entonces $\lvert f(z)-L\rvert<\varepsilon$.
f es continua en a si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si z cumple $\lvert z-a\rvert<\delta$ entonces $\lvert f(z)-f(a)\rvert<\varepsilon$.

[Si un entorno es $B(a,r)=\{z\in\mathbf{C}:|z-a|<r\}$, que f es continua en a significa que podemos encontrar un entorno de a de radio δ lo suficientemente pequeño de forma que su imagen este contenida en un entorno de $f(a)$ de cualquier radio ε , por pequeño que sea ε].



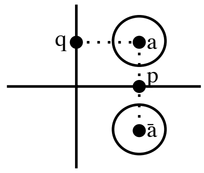
Teorema:

f y g continuas en $a\in\mathbf{C}\Rightarrow f\pm g$, $f\cdot g$ y f/g (si $g(a)\neq 0$) son continuas en a .
Si $f=u+\mathrm{i}v$ (u , v reales), entonces f es continua en $a\Leftrightarrow u$ y v son continuas en a .

Las demostraciones del $\pm$, $\cdot$ y $/$ son iguales que las reales, ya que seguimos teniendo la desigualdad triangular; para la otra: $|f(z)-f(a)|=|[u(z)-u(a)]+\mathrm{i}\,[v(z)-v(a)]|$ es pequeño si y sólo si lo son $|u(z)-u(a)|$ y $|v(z)-v(a)|$.

Ej. Es fácil ver que $f(z) = $ constante y $f(z) = z$ son continuas en cualquier a (por tanto, también lo son cualquier polinomio y cualquier cociente de polinomios donde el denominador no se anula).

Ej. $\mathrm{Re}(z) = x$ e $\mathrm{Im}(z) = y$ son continuas $\forall a$ por el teorema anterior y porque $f(z) = z$ lo es.



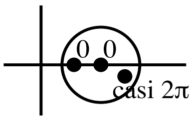
[O directamente: si $a = p + \mathrm{i}q$

$|x-p|, |y-q| < \sqrt{[x-p]^2+[y-q]^2} = |z-a| < \varepsilon$ si $|z-a| < \delta = \varepsilon$]

Ej. $f(z) = \bar{z}$ es continua $\forall a \in \mathbf{C}$: $|\bar{z}-\bar{a}| = |\overline{z-a}| = |z-a| < \varepsilon$ si $|z-a| < \delta = \varepsilon$

[o por el teorema y el ejemplo anterior: $u(z) = x$, $v(z) = -y$ lo son]

[como se verá en Cálculo II, una función de dos variables que sea composición de funciones continuas será continua; así será fácil asegurar que lo es, por ejemplo, $f(x+\mathrm{i}y) = y\arctan(xy) + \mathrm{i}x\cos(x+y)$]



Hay funciones discontinuas muy sencillas como $\mathrm{Arg}(z)$ en cualquier a real positivo. En cualquier entorno de a hay puntos z en que $\mathrm{Arg}(z)$ es casi 2π y por tanto $|\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(a)| = |\mathrm{Arg}(z) - 0|$ no se puede hacer tan pequeño como queramos [en los demás a la función sí es continua; si el argumento principal lo hubiésemos escogido en $(-\pi, \pi]$ conseguiríamos que la función $\mathrm{Arg}(z)$ fuese continua en el semieje real positivo, pero la discontinuidad se trasladaría al negativo].

Def. $\boxed{f(z) \text{ es derivable en } a \in \mathbf{C} \text{ si existe el } \lim\limits_{z\to 0} \frac{f(a+z)-f(a)}{z} = f'(a)}$

[Definición exactamente igual que la de $\mathbf{R}$; también exactamente como allí se prueba que 'derivable $\Rightarrow$ continua' y los resultados para el cálculo:

$(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $(1/g)' = -g'/g^2$, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Con esto sabemos derivar polinomios y funciones racionales (más adelante también podremos derivar $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ y e^z , pero por ahora ni siquiera sabemos lo que son estas funciones complejas)].

Ej. Hay funciones muy sencillas no derivables como $f(z) = \bar{z}$, pues $\nexists \lim\limits_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim\limits_{(x+\mathrm{i}y)\to 0} \frac{x-\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y}$:

$\frac{x-\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y}$ cuando $y = 0$ vale 1 y cuando $x = 0$ vale -1 ; el límite no puede existir pues el cociente toma valores 1 y -1 para z tan cercanos como queramos a 0 .

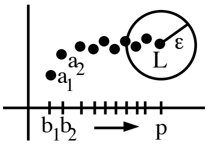
[Sabiendo algo de derivadas parciales: se prueba en análisis complejo que para que una $f = u + \mathrm{i}v$ sea derivable es necesario que se cumpla: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann). Para $f(z) = x - \mathrm{i}y$ no se satisfacen, pues $u_x = 1 \neq v_y = -1$. De hecho, la mayoría de las funciones definidas en la forma $f = u + \mathrm{i}v$ serán no derivables, pues es mucha casualidad que u y v cualesquiera satisfagan dichas ecuaciones. Comprobemos que sí se cumplen para una función derivable como $f(z) = z^2$ (de derivada $f'(z) = 2z$): $u_x = 2x = v_y$, $u_y = -2y = -v_x$].

6.2. Series complejas de potencias

Comencemos con **sucesiones** $\{a_n\} \subset \mathbf{C}$ de complejos, o sea, funciones de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{C}$ [$|\cdot|$ módulo]:

Def. $\boxed{\{a_n\} \to L \text{ si para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } N \text{ natural tal que si } n \geq N \text{ entonces } |a_n - L| < \varepsilon}$

Para cualquier entorno de L casi todos los puntos de $\{a_n\}$ están dentro:



Teorema: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Sea } a_n = b_n + \mathrm{i}\, c_n \text{, con } b_n \text{ y } c_n \text{ reales y } L = p + \mathrm{i}\, q\,. \\ \text{Entonces } \{a_n\} \to L \Leftrightarrow \{b_n\} \to p \text{ y } \{c_n\} \to q\,.\end{array}}$

$\Rightarrow$) $\forall \varepsilon\, \exists N$ tal que si $n \geq N \Rightarrow |a_n - L| = |(b_n - p) + \mathrm{i}\,(c_n - q)| < \varepsilon \Leftrightarrow (b_n - p)^2 + (c_n - q)^2 < \varepsilon^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b_n - p)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |b_n - p| < \varepsilon \\ (c_n - q)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |c_n - q| < \varepsilon \end{cases}$$

$\Leftarrow$) $\forall \varepsilon \begin{cases} \exists N_1, n \geq N_1 \Rightarrow |b_n - p| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2, n \geq N_2 \Rightarrow |c_n - q| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |a_n - L| \leq |b_n - p| + |c_n - q| < \varepsilon$ si $n \geq \text{máx}\{N_1, N_2\}$

Como en $\mathbf{R}$, una **serie** de complejos $\sum a_n$ se dice convergente si lo es su sucesión S_n de sumas parciales. Una consecuencia inmediata del teorema anterior es:

Teorema: $\boxed{a_n = b_n + \mathrm{i}\, c_n : \sum a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum b_n \text{ y } \sum c_n \text{ convergen y es } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} c_n}$

$\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si lo hace la serie real $\sum |a_n|$, a la que se le pueden aplicar todos los criterios de convergencia de series reales conocidos. Se tiene también que:

Teorema: $\boxed{\sum a_n \text{ absolutamente convergente} \Rightarrow \sum a_n \text{ convergente}}$

Si $a_n = b_n + \mathrm{i}\, c_n$, $|a_n|^2 = |b_n|^2 + |c_n|^2 \Rightarrow |b_n|, |c_n| \leq |a_n|$. Por tanto:

$\sum |a_n|$ convergente $\Rightarrow \sum |b_n|$ y $\sum |c_n|$ convergente $\Rightarrow \sum b_n$ y $\sum c_n$ convergentes

También se tienen aquí los criterios de cociente y de la raíz (iguales que los de $\mathbf{R}$) y son reales las sucesiones $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ y $\sqrt[n]{|a_n|}$ cuyo límite hay que calcular para aplicarlos.

Ej. $a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n} + \mathrm{i}\,(2 + \frac{1}{n})^n$ diverge, pues $b_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n} \to 0$, pero $c_n = (2 + \frac{1}{n})^n \to \infty$.

Ej. $a_n = (\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2})^n$; $|a_n| = 2^{-n/2} \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$ [esto es intuitivamente claro y fácil de formalizar]

Ej. $\sum (\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2})^n$ converge pues $\sum |a_n| = \sum (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ es serie geométrica convergente

[como en $\mathbf{R}$ se ve que: $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow a_n \to 0$; otra prueba de que la última $\{a_n\}$ converge]

Ej. $\sum \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ no converge absolutamente (pues $\sum \frac{1}{n}$ es divergente), pero sí converge:

$$\sum \frac{\mathrm{i}^n}{n} = \mathrm{i} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{\mathrm{i}}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots = -\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \cdots) + \mathrm{i}\,(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots)$$

puesto que son convergentes las dos últimas series por Leibniz.

Ej. $\sum \frac{(7+\mathrm{i})^n}{n^3}$ diverge, pues $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|7+\mathrm{i}|^{n+1}}{|7+\mathrm{i}|^n} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 5\sqrt{2}\, \frac{n^3}{(n+1)^3} \to 5\sqrt{2} > 1$, o bien,

porque $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{5\sqrt{2}}{n^{3/n}} \to 5\sqrt{2} > 1$ (que $\sum |a_n|$ diverja, en principio no prueba nada).

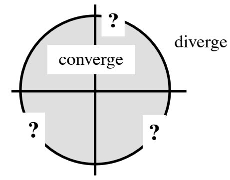
Veamos las **series de potencias** complejas $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$, $a_n, z\in\mathbf{C}$.

Se dan resultados como los de $\mathbf{R}$ con demostraciones (que no hacemos) calcadas de las de allí:

Teorema:

A cada serie de potencias está asociado un número positivo R, llamado **radio de convergencia** de la serie, que tiene las siguientes propiedades: si $R=0$, la serie sólo converge si $z=0$; si $R=\infty$, la serie converge para todo z; si R es un número real positivo, la serie converge para $|z|<R$ y diverge para $|z|>R$.

Aquí el intervalo de convergencia se ha convertido en el círculo de convergencia $|z|<R$. Sobre la circunferencia $|z|=R$ no se puede asegurar nada. Como en los reales habrá series que convergen en toda ella, otras en puntos aislados, otras en ninguno... El cálculo del R se podrá hacer casi siempre utilizando el criterio del cociente o la raíz.

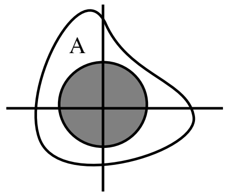


Estas series se pueden sumar, multiplicar, dividir, igual que las reales y se tiene el mismo resultado sobre derivación:

Teorema: Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para $|z|<R \Rightarrow f$ es derivable para $|z|<R$ y $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

Y, por tanto, las funciones definidas por series de potencias vuelven a ser infinitamente derivables (y también continuas, desde luego) dentro del círculo de convergencia. Un resultado importante y sorprendente, que desde luego no es cierto en los reales, y que se prueba con técnicas más avanzadas de cálculo complejo es:

Teorema: Una función $f(z)$ derivable en una región A del plano es infinitamente derivable en A. Además, en todo círculo contenido en A la función $f(z)$ coincide con su serie de Taylor.



Definimos tres nuevas funciones complejas, que hasta ahora no tenían sentido:

Def. $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\operatorname{sen} z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\forall z\in\mathbf{C}$

El R de las tres series es ∞. Tienen propiedades (fáciles de probar) esperadas como:

$$(\operatorname{sen} z)'=\cos z\,,\ (\cos z)'=-\operatorname{sen} z\,,\ \operatorname{sen}(-z)=-\operatorname{sen} z\,,\ \cos(-z)=\cos z\,,$$
$$(e^z)'=e^z\,,\ e^{-z}=1/e^z\,,\ e^{z+w}=e^z e^w\,,\ \ldots$$

Además de otras nuevas como:

$$e^{iz}=1+iz-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{iz^5}{5!}-\cdots=(1-\frac{z^2}{2!}+\cdots)+i(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots)=\cos z+i\operatorname{sen} z$$
$$e^{-iz}=\cos z-i\operatorname{sen} z\,,\ \operatorname{sen} z=\frac{1}{2i}[e^{iz}-e^{-iz}]\,,\ \cos z=\frac{1}{2}[e^{iz}+e^{-iz}]$$

[Si $z=y$ real deducimos la prometida relación que abreviaba la forma polar: $e^{iy}=\cos y+i\operatorname{sen} y$].

No es necesario sumar series para calcular exponenciales: $e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$.

[Ni senos: $\operatorname{sen}(\pi+i)=\frac{1}{2i}[e^{i(\pi+i)}-e^{-i(\pi+i)}]=-\frac{i}{2}[e^{-1}e^{i\pi}-e^{1}e^{-i\pi}]=\frac{i}{2}[e^{-1}-e^{1}]$ ($=\operatorname{sen} i$)].

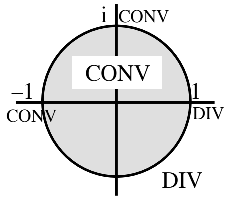
Las funciones complejas $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ no están acotadas. En el eje imaginario, por ejemplo:

$$\operatorname{sen}(iy)=\frac{1}{2i}[e^{-y}-e^{y}]=i\operatorname{sh} y\,,\ \cos(iy)=\frac{1}{2}[e^{-y}+e^{y}]=\operatorname{ch} y$$

[resultado clásico es que las únicas funciones acotadas y analíticas en todo el plano son las constantes].

Lo visto para series complejas permite explicar situaciones sorprendentes de las funciones reales. ¿Por qué si tanto e^x como $\frac{1}{1+x^2}$ son $C^\infty(\mathbf{R})$, la serie de la primera converge $\forall x$ mientras que la de la otra sólo lo hace si $|x|<1$? Pues porque la serie $1-z^2+z^4-\cdots$ de $\frac{1}{1+z^2}$ ha de definir una función continua y en $z=\pm\mathrm{i}$ esta no lo es [esto sucede para todo cociente de polinomios complejos (reales, en particular): el radio R de su serie es la distancia al cero más próximo del denominador (en $|z|<R$ es derivable y, por tanto, analítica)]. También entendemos el extraño comportamiento de la $f(x)=e^{-1/x^2}$, $f(0)=0$ que tiene infinitas derivadas pero sólo coincide con su serie de Taylor en $x=0$: como $f(\mathrm{i}y)=e^{1/y^2}\underset{y\to 0}{\longrightarrow}\infty$, la función compleja no es siquiera continua en $z=0$.

Ej. Estudiemos donde converge: $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\to 1=R$.



Converge en el círculo $|z|<1$ y diverge en $|z|>1$. ¿Qué pasa en $|z|=1$?
No converge absolutamente en esa circunferencia, pero podría converger en algunos z de ella. Por ejemplo:

si $z=-1$, la serie $\sum\frac{[-1]^n}{\sqrt{n}}$ converge por Leibniz; si $z=1$, $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge;

si $z=\mathrm{i}$, converge, pues $\sum\frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{n}}=\sum\frac{[-1]^n}{\sqrt{2n}}+\mathrm{i}\sum\frac{[-1]^n}{\sqrt{2n+1}}$ y convergen ambas (Leibniz).

Ej. Desarrollemos en serie $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$.

Que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ converge $\Leftrightarrow |z|<1$ y que su suma es $\frac{1}{1-z}$ se prueba como en $\mathbf{R}$. Así pues:

$f(z)=\frac{1}{4}\frac{1}{1-[-z^2/4]}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{4^{n+1}}$, $|\frac{-z^2}{4}|<1\Leftrightarrow|z|<2$ (distancia de los ceros al origen).

[la serie no converge en ningún punto de la circunferencia $|z|=2$ pues para cualquier z con ese módulo queda una serie cuyo término general no tiende a 0 pues tiene módulo constante $1/4$].

Podemos desarrollarla también (dando rodeos) de otras formas.

Descomponiendo en fracciones simples complejas:

$\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\big[\frac{1}{z-2\mathrm{i}}-\frac{1}{z+2\mathrm{i}}\big]=\frac{1}{8}\big[\frac{1}{1-z/2\mathrm{i}}+\frac{1}{1+z/2\mathrm{i}}\big]=\frac{1}{8}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big[\frac{z^n}{(2\mathrm{i})^n}+\frac{(-z)^n}{(2\mathrm{i})^n}\big]=\frac{1}{8}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n}}{2^{2n}\mathrm{i}^{2n}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{4^{n+1}}$

Dividiendo (las manipulaciones con series complejas, como dijimos, como las de las reales):

$[4+z^2][a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots]=1\to 4a_0=1, a_0=14\,; 4a_1=0, a_1=0\,; 4a_2+a_0=0, a_2=-\frac{1}{16}\,;\ldots$