

2006

**APUNTES
DE
CÁLCULO I**

Pepe Aranda
pparanda@fis.ucm.es

**Departamento de Métodos Matemáticos
Facultad de Físicas. UCM
www.ucm.es/info/metodos**

Índice

1. Números naturales, enteros, racionales y reales

1.1 Naturales, enteros y racionales	1
1.2 El conjunto \mathbf{R}	4

2. Funciones, sucesiones, límites y continuidad en \mathbf{R}

2.1 Funciones reales de variable real	9
2.2 Sucesiones de números reales	14
2.3 Límites de funciones. Funciones continuas	19
2.4 Teoremas sobre funciones continuas en intervalos	25

3. Derivadas en \mathbf{R}

3.1 Definición y cálculo	27
3.2 Teoremas sobre funciones derivables	31
3.3 Polinomios	34
3.4 Ceros de funciones	37
3.5 Representación de funciones	39
3.6 Aplicaciones	43

4. Series, Taylor y límites indeterminados

4.1 Series de números reales	45
4.2 Sucesiones y series de funciones	52
4.3 Series de potencias	55
4.4 Polinomios y series de Taylor	58
4.5 Cálculo de límites indeterminados	64

5. Integración en \mathbf{R}

5.1 Definición y propiedades	71
5.2 Teoremas fundamentales	73
5.3 Cálculo de primitivas	77
5.4 Integrales impropias	82
5.5 Integración aproximada	86
5.6 Aplicaciones	91

6. Introducción al cálculo en \mathbf{C}

6.1 Funciones de variable compleja	95
6.2 Series complejas de potencias	99

Problemas adicionales	103
------------------------------	-----

Bibliografía:

- [Sp] M. Spivak. Calculus. Ed. Reverté
[L] S. Lang. Cálculo. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana
[St] S. Stein. Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill
[LHE] Larson-Hostetler-Edwards. Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill
[A] T. Apostol. Calculus. Ed. Reverté
[CJ] Courant-John. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Ed. Limusa-Wiley
[B] J. Burgos. Cálculo infinitesimal de una variable. Ed. McGraw-Hill
[K] K. Kuratowski. Introducción al cálculo. Ed. Limusa-Wiley

Elaborar unos apuntes de una asignatura tiene la ventaja para los alumnos de precisar qué es lo que en concreto se va a explicar durante el curso. Además les permite no estar todo el rato pendientes de copiar a la mayor velocidad posible (con los errores que ello produce) todo lo que se escribe en la pizarra. Pero tiene también sus claras desventajas. La existencia de los apuntes suele incitarles a utilizar poco otros libros, que dan otras visiones de la asignatura y que tratan diferentes temas con más extensión, ejemplos, aplicaciones o rigor (según los casos) que en dichos apuntes.

Es importante, como se acaba de decir, consultar libros. El problema fundamental de la bibliografía para un curso de Cálculo de primer curso es que no existe 'el libro adecuado' a todos los estudiantes, pues éstos llegan a la universidad con muy diferente formación matemática. El ideal sería que toda persona de primero de Físicas pudiera seguir sin excesivo esfuerzo un libro tan bonito como el Spivak. Pero ese ideal dista mucho de la realidad.

En teoría, en las asignaturas de matemáticas del bachillerato se han tratado (está escrito en los programas oficiales) bastantes temas de los que se va a profundizar en Cálculo I. Por ejemplo: números reales, inecuaciones, sucesiones, rectas, trigonometría, exponenciales y logaritmos, concepto intuitivo de límites, derivación, gráficas, primitivas sencillas, cálculo de áreas u operaciones elementales con complejos. Según esto, sólo parte de los temas de Cálculo I se verían por primera vez: todo lo relativo a series, la definición rigurosa de límites, los desarrollos de Taylor, las sucesiones de funciones, el cálculo de primitivas complicadas, las integrales impropias y pocas cosas más (además del cambio que suele representar la insistencia de los profesores universitarios en 'las demostraciones').

La experiencia dice que, aunque hay un porcentaje digno de estudiantes que sí controlan buena parte de los citados temas del bachillerato, hay otra parte (por desgracia no muy minoritaria) con demasiados agujeros en su formación. Para los primeros, los libros clásicos de Cálculo ([Sp], [A] o [CJ]) son el complemento natural de estos apuntes (el [A] tiene temas además de otras asignaturas: Álgebra, Cálculo II, Ecuaciones Diferenciales,...). Pero para estudiantes de menor nivel matemático es preferible manejar libros más elementales, como el [L], [St] o [LHE], que contienen muchos más ejemplos sencillos (aunque no incluyen los temas más complicados del curso: diferentes demostraciones, convergencia uniforme, impropias...). Los seis libros anteriores estudian (al contrario que en el programa de Cálculo I) primero las funciones (integrales incluidas) y luego las sucesiones y series. Los dos siguientes ([B] y [K]) tratan las sucesiones y series al principio. El [K] es difícil de leer (y de encontrar), pero es citado porque de él se han extraído algunas demostraciones.

Las hojas de problemas comunes a varios grupos de Cálculo I y los adicionales de estos apuntes son más que suficientes para el curso. Pero en todos los libros de la bibliografía hay más problemas propuestos y resueltos. Si algún amante de las matemáticas quiere problemas más teóricos y complicados, que no dude en enfrentarse a los del [Sp]. Pero probablemente sea mayor el número de quienes echan en falta en nuestros problemas ejercicios sencillos que permitan repasar los temas del bachillerato. En [L], [St] o [LHE] se pueden encontrar cientos de ellos.

Novedades de las últimas versiones de los apuntes:

versión 2003: Primera escrita a \LaTeX , con el mismo orden en los temas que las anteriores a ordenador (y los viejos apuntes a mano de los años 80), aunque añadiendo diversas explicaciones a la teoría y nuevos ejemplos y problemas.

versión 2004: Con los mismos temas que las anteriores, pero algunos de ellos organizados de forma diferente. Si en la versión 2003 y anteriores el capítulo 1 (además de repasar los números y sus propiedades) contenía las sucesiones y las series numéricas, en ésta se acercan estas series a las de funciones, potencias y Taylor.

Las sucesiones se trasladan a la sección 2.2, con el fin de haber dado antes el concepto de función y haber repasado las propiedades de los senos, cosenos, exponenciales, . . . [Creo que el límite de sucesiones (definición rigurosa de las que suelen tener problemas para ser entendidas) se debe dar antes que el ligeramente más complicado límite de funciones].

El 4 pasa a comenzar con las series numéricas, luego se tratan las sucesiones y series de funciones en general, y a continuación las de potencias. Los polinomios de Taylor (con los que en el 2003 empezaba el capítulo) se juntan en la sección 4.4 a las series de Taylor para no interrumpir los argumentos.

El capítulo 3 permanece tal como estaba. El 5 sigue casi, casi igual (simplemente las longitudes adelantan a los volúmenes en 5.6) y el 6 tampoco varía (salvo que la i pasa a ser i).

Como todos los años, se corrigen erratas (y probablemente se crean algunas nuevas), se añaden algunas explicaciones a la teoría (en parte necesarias por la nueva organización de los temas) y se elaboran nuevos ejemplos (y se cambian otros de sitio).

Los problemas (comunes y adicionales) se organizan según el nuevo orden de la teoría. Los comunes se reducen de 117 a 100, a pesar de incluir los de examen de 2004 y los de 2001 (antes en adicionales). Los adicionales, además de unos pocos nuevos, recogen, como siempre, los retirados de las hojas de comunes.

versión 2005: Sólo se hace alguna corrección estética y de erratas a la teoría y, como todos los años, se cambian algo los problemas, tanto los comunes como los adicionales.

versión 2006: La letra pasa a ser Times (comando `\usepackage{mathptmx}` en \LaTeX), lo que lleva a unos cuantos ajustes estéticos, de orden o de lenguaje para ajustar espacios.

Las sucesiones de Cauchy se van al final de 2.2 (para aclarar que son secundarias en el temario del curso). Por la misma razón, Trapecios y Simpson son adelantadas por la integración de series en 5.5.

Las sucesiones de límite no justificado (como $\sqrt[n]{n}$) retrasan su aparición a 2.3 (aún sin justificación, aunque más cerca del L'Hôpital, que pasa a ser demostrado (sin ser utilizado) en 3.2). Se reordena también la sección 4.5 de los límites indeterminados.

Se retoca un poco la sección 3.3 (la parte de los polinomios de tercer y cuarto orden).

Lo de siempre en problemas: se incluyen de los exámenes del 2005-06 en los 100 comunes, se cambia de sitio alguno y otros pasan a ser problemas adicionales (que de año en año van creciendo).